РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ ИМ. А.В. ГАПОНОВА-ГРЕХОВА

На правах рукописи

МАСЛЕННИКОВ Олег Владимирович

КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБУЧАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность
1.3.4 – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф.
Некоркин Владимир Исаакович

Нижний Новгород – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **9**

Актуальность темы 9

Цель и задачи работы 12

Научная новизна 13

Теоретическая и практическая значимость работы 15

Методология и методы исследования 16

Положения, выносимые на защиту 16

Степень достоверности и апробация результатов 19

Личный вклад автора 21

Структура и объем диссертации 21

1 ДИНАМИКА АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ **22**

1.1 Модели активных элементов: классификация и методы описания 23

1.1.1 Введение 23

1.1.2 Модели с физической интерпретацией переменных: импульсные элементы 24

1.1.3 Модели с физической интерпретацией переменных: осцилляторные и возбудимые генераторы 29

1.1.4 Абстрактные непрерывные модели и рекуррентные архитектуры 32

1.1.5 Связи между моделями: предельные переходы и упрощения 38

1.1.6 Единый аппарат динамического анализа 40
1.1.7 Хаотические режимы динамики активных элементов . . 42
1.2 Хаотические бёрстовые колебания в дискретных быстро-медленных системах 45
1.2.1 Класс быстро-медленных отображений 46
1.2.2 Быстрая и медленная подсистемы 48
1.2.3 Свойства быстрой подсистемы 48
1.2.4 Существование инвариантной области и аттрактора . . . 50
1.2.5 Оценка старшего показателя Ляпунова 53
1.2.6 Качественное описание движений на аттракторе 55
1.2.7 Реализация в дискретной нейронной модели 57
1.2.8 Зависимость характеристик бёрстовых колебаний от параметров 62
1.3 Управление переходным хаосом посредством периодического воздействия 64
1.3.1 Отображение лоренцевского типа и граничный кризис . 65
1.3.2 Периодическая модуляция управляющего параметра . . 67
1.3.3 Распределение времён жизни хаоса 69
1.3.4 Вероятность выживания хаотической динамики 69
1.3.5 Аналитическое приближение для вероятности выживания хаотической динамики 73
1.3.6 Скорость выхода: зависимость от амплитуды и отстройки 75
1.3.7 Структура непритягивающего множества 77
1.3.8 Карта «времён жизни» хаоса 79
1.4 Заключение к главе 1 80

2 КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ 85

2.1 Нелокальная устойчивость синхронизации бёрстов в сетях хаотических осцилляторов 90

2.1.1 Сложные сети хаотических осцилляторов 90

2.1.2 Мера синхронизации бёрстов и определение «бассейновой» устойчивости 93

2.1.3 Оптимальность архитектуры «малого мира» 96

2.1.4 Оптимальные значения плотности и силы связей 98

2.1.5 Деформация структуры фазового пространства 100

2.1.6 Влияние параметров элементов 102

2.1.7 Связь «бассейновой» устойчивости со свойствами активных элементов 103

2.2 Адаптивные сети и гиперсетевое описание метастабильной динамики 106

2.2.1 Коэволюция состояний и связей 107

2.2.2 Спайковая сеть с подавляющими связями и событийной перестройкой структуры 108

2.2.3 Гиперсетевое описание: иерархия уровней и граф переходов 112

2.2.4 Автономный режим: случайное блуждание 114

2.2.5 Детерминация траекторий внешним воздействием . . . 114

2.2.6 Аппаратная реализация на ПЛИС 115

2.3 Иерархические переходы, перенос доменной структуры и пространственный хаос в сетях осцилляторов 118

2.3.1 Неоднородные сети осцилляторов Стюарта–Ландау с корреляцией «структура–динамика» 119

2.3.2 Мультиплексная адаптивная сеть: иерархическое подавление 128
2.3.3 Перенос доменной структуры между слоями 133
2.3.4 Пространственный хаос в кольцах бистабильных осцилляторов Баутина 140
2.4 Заключение к главе 2 154

3 РЕЗЕРВУАРНЫЕ СЕТИ И ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ 160

3.1 Генерация пространственно-временных паттернов в резервуарных сетях 163
3.1.1 Введение и постановка задачи 163
3.1.2 Архитектура резервуарной системы 166
3.1.3 Алгоритм обучения 169
3.1.4 Роль временно́й константы: согласование внутреннего масштаба с целевым сигналом 171
3.1.5 Резервуар на дискретных спайковых элементах 174
3.1.6 Формирование упорядоченной коллективной активности при обучении 184
3.1.7 Генерация сложных пространственно-временных паттернов 189
3.1.8 Спектральный механизм формирования автономных режимов 193
3.1.9 Микроскопическая динамика и вклад структуры обученных весов при генерации сложных паттернов 197
3.1.10 Выводы 202

3.2 Индуцированная стимулом динамика в резервуарных сетях . . . 203
3.2.1 Введение и постановка задачи 204
3.2.2 Архитектура системы 205
3.2.3 Автономная генерация: аттракторный механизм 208
3.2.4 Дискриминация входов: регуляризация хаоса внешним стимулом 209
3.2.5 Переключение между последовательностями: метастабильные маршруты 213
3.2.6 Сопоставление аттракторного и переходного механизмов 214
3.2.7 Выводы 216
3.3 Топологический и геометрический анализ представлений в резервуарных сетях 217
3.3.1 Введение и постановка задачи 218
3.3.2 Методы алгебраической топологии 220
3.3.3 Каноническая задача и модели резервуаров 221
3.3.4 Точность решения задачи: сравнение трёх типов активных элементов 225
3.3.5 Топология и геометрия представлений 226
3.3.6 Парадокс спайкового резервуара и его разрешение . . . 228
3.3.7 Анализ робастности результатов 231
3.3.8 Выводы 232
3.4 Физический резервуар на основе электронной цепочки связанных возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо 234
3.4.1 Введение и постановка задачи 234
3.4.2 Экспериментальная установка: электронная цепочка ФитцХью–Нагумо 236

3.4.3 Протокол воздействия на граничные элементы цепочки и пространственно-временной отклик 237
3.4.4 Построение пространства признаков 241
3.4.5 Анализ пространства признаков: методология томографии 244
3.4.6 Экспериментальные результаты: эффективность классификации 246
3.4.7 Анализ структуры пространства признаков 248
3.4.8 Обобщение на реальные акустические данные: классификация гласных 250
3.4.9 Выводы 252
3.5 Структура фазового пространства и компактность представления в резервуарных и полностью обучаемых рекуррентных сетях . . 254
3.5.1 Введение и постановка задачи 255
3.5.2 Задача контекстно-зависимой интеграции 257
3.5.3 Исследуемые архитектуры сетей 258
3.5.4 Методы анализа эффективности и динамических механизмов 259
3.5.5 Динамическая память и пределы резервуарных сетей . . 260
3.5.6 Разделение контекстов в фазовом пространстве 261
3.5.7 Собственные значения матрицы редуцированной модели 264
3.5.8 Граница эффективности: точность и компактность представления 266
3.5.9 Выводы 267
3.6 Заключение к главе 3 268

4 ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ В ПОЛНО-

СТЬЮ ОБУЧАЕМЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СЕТЯХ 273

4.1 Задача бинарного выбора в обучаемых рекуррентных сетях . . . 276

4.1.1 Введение и постановка задачи 276

4.1.2 Модель рекуррентной сети для задачи сравнения стимулов 278

4.1.3 Смешанная селективность активных элементов 279

4.1.4 Разъединённые главные компоненты 281

4.1.5 Структура фазового пространства в спайковых сетях . . 282

4.1.6 Популяционная специализация и механизм выбора . . . 284

4.1.7 Выводы 285

4.2 Задача интегрирования входного сигнала в обучаемых рекуррентных сетях 287

4.2.1 Введение и постановка задачи 289

4.2.2 Архитектура сети и метод обучения 290

4.2.3 Самоорганизация кольцевой структуры 292

4.2.4 Функциональная специализация 293

4.2.5 Роль пространственного согласования между управлением и аттрактором 296

4.2.6 Выводы 298

4.3 Многозадачность в спайковых рекуррентных сетях 298

4.3.1 Введение и постановка задачи 299

4.3.2 Процедура обучения и функция потерь 306

4.3.3 Функциональная специализация активных элементов . . 308

4.3.4 Кластерная структура обученной сети 310

4.3.5 Структура траекторий в фазовом пространстве 313

4.3.6 Роль адаптивной переменной 317

4.4 Влияние парадигмы обучения на структуру фазового пространства 321

4.4.1 Введение и постановка задачи 322
4.4.2 Архитектура сетей и методология анализа 325
4.4.3 Качественное различие структур фазового пространства 327
4.4.4 Квазипериодические аттракторы в сетях, обученных с подкреплением 330
4.4.5 Структура популяций в процессе обучения 331
4.4.6 Парадигма обучения как физический параметр 334
4.5 Заключение к главе 4 336

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **340**

Список литературы **347**

Публикации автора по теме диссертации 347
Прочие источники 352

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Основы теории нелинейных колебаний, заложенные в пионерских работах школы Мандельштама и Андронова, установили методологический фундамент описания автоколебательных систем через анализ фазового пространства, бифуркаций и устойчивости. Этот подход позволил успешно изучить эффекты синхронизации, формирование волновых структур и пространственно-временной хаос в системах с фиксированной архитектурой связей. Однако современные задачи всё чаще требуют решения обратной проблемы — *синтеза* динамических систем с заданными функциональными свойствами. Наиболее остро эта проблема проявилась в двух направлениях, исторически развивавшихся на пересечении с теорией колебаний: вычислительной нейронауке и машинном обучении.

Вычислительная нейронаука с самого начала опиралась на аппарат нелинейной динамики. Модель Ходжкина–Хаксли [1] связала электрофизиологию нейрона с этим формализмом, продемонстрировав, что генерация потенциала действия представляет собой релаксационные колебания в быстро-медленной системе. Последующие работы [2—4] систематизировали связь между бифуркационной структурой нейронных моделей и паттернами их активности. На сетевом уровне были исследованы механизмы синхронизации [5—8], формирования пространственно-временных паттернов [9, 10] и динамика переходных процес-

сов [11, 12]. К настоящему времени язык нелинейной динамики — аттракторы, бифуркации, устойчивость многообразий — стал стандартным инструментом *анализа* нейронных систем, однако вопрос о том, как целенаправленно *сконструировать* сеть с требуемой динамикой, оставался за рамками этого подхода.

Именно эту задачу — формирование желаемого поведения путём настройки параметров — взяло на себя машинное обучение, развивавшееся из иных методологических предпосылок. Модель ассоциативной памяти Хопфилда [13] установила связь между нейронными сетями и статистической физикой: сеть интерпретируется как система, релаксирующая к минимумам энергетической функции, что позволило применить методы статистической физики [12, 14, 15] для анализа свойств аттракторного ландшафта. Алгоритм обратного распространения ошибки [16] и методы обучения с подкреплением [17, 18] открыли возможность целенаправленного формирования сложного поведения в сетях, а концепция резервуарных вычислений [19—22] показала, что хаотическая динамика [12] сама по себе может служить вычислительным ресурсом. Присуждение Нобелевской премии по физике 2024 года Дж. Хопфилду и Дж. Хинтону [23] подчеркнуло, что искусственные нейронные сети представляют собой сложные системы, поведение которых определяется принципами нелинейной динамики и статистической физики.

Тем не менее между описанными направлениями сохраняется концептуальный разрыв. Теория нелинейных колебаний предоставляет инструментарий для *анализа* — описания аттракторов, бифуркаций, устойчивости в системах с фиксированной архитектурой, но не даёт рецептов для *синтеза* — конструирования сети с заданными свойствами. Методы машинного обучения, напротив, решают задачу синтеза, настраивая параметры сети для выполнения конкретной функции, однако действуют как «чёрный ящик», не раскрывая физических

принципов сформированных вычислительных механизмов. Открытым остаётся центральный вопрос: *каким образом алгоритм обучения трансформирует фазовое пространство многомерной динамической системы, формируя аттракторные структуры и траектории, необходимые для реализации вычислений?*

Ответ на этот вопрос имеет два практических направления. Во-первых, рекуррентные нейронные сети, обученные на когнитивных задачах [24, 25], всё шире используются как модели для изучения принципов работы биологических нейронных систем [26—28]: выявление динамических механизмов, спонтанно возникающих в обученных сетях, позволяет формулировать проверяемые гипотезы о нейронных основах принятия решений [29, 30], рабочей памяти и пространственной навигации [31, 32]. Во-вторых, понимание того, как обучение формирует функциональную динамику, непосредственно относится к задаче построения объяснимого искусственного интеллекта [33] — переходу от феноменологического описания («сеть решает задачу») к механистическому объяснению («сеть решает задачу посредством определенных динамических структур»).

Настоящая работа направлена на преодоление указанного разрыва путём развития радиофизического подхода к теории обучаемых нейронных сетей. Обучение рассматривается не как абстрактная оптимизационная процедура, а как управляемый процесс формирования функциональной коллективной динамики — создания аттракторов, модификации их бассейнов притяжения, формирования каналов переходной динамики. Такой взгляд превращает обучение в предмет физического исследования, допускающий качественное и количественное описание в терминах теории нелинейных колебаний.

Актуальность работы определяется необходимостью построения этой свя-

зи. Установление закономерностей, связывающих динамику элементов, архитектуру сети и её функциональные свойства, является нерешённой задачей, имеющей значение как для понимания принципов работы биологических нейронных систем, так и для развития методов анализа и проектирования искусственных нейронных сетей.

Цель и задачи работы

Целью диссертационной работы является установление динамических механизмов, посредством которых нелинейные сети активных элементов приобретают функциональные свойства, и установление связей между структурой фазового пространства, топологией сети, характером обучения и эффективностью выполнения целевых задач.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Установить бифуркационные механизмы хаотического бёрстовых колебаний в дискретных быстро-медленных системах; доказать существование быстро-медленных аттракторов и получить аналитические оценки их хаотичности.

2. Исследовать управляемость переходного хаоса периодической модуляцией параметра; получить аналитические приближения для времени продолжения хаотической динамики.

3. Установить зависимости нелокальной («бассейновой») устойчивости синхронизации бёрстов от топологии, параметров связей и динамики индивидуальных осцилляторов.

4. Выявить механизмы функциональных переключений в адаптивных сетях;

разработать формализм гиперсетевого описания. Исследовать перенос доменной структуры в мультиплексных адаптивных сетях.

5. Раскрыть аттракторный и переходный механизмы формирования функциональности при обучении считывающего слоя; установить спектральные закономерности обученных матриц связей.

6. Сформулировать принцип вычислительного соответствия; разработать топологические и геометрические методы описания вычислительных режимов; реализовать физический резрвуар.

7. Исследовать самоорганизацию аттракторов и популяционной специализации при настройке всех параметров сети; выявить механизмы принятия решений, интеграции и многозадачного выполнения.

8. Провести систематическое сравнение структур фазового пространства, формируемых обучением с подкреплением и обучением с учителем при идентичных задачах.

Научная новизна

Все основные результаты, представленные в диссертации, являются новыми:

1. Впервые предложен и теоретически обоснован механизм возникновения хаотических бёрстовых колебаний в быстро-медленных системах с дискретным временем, основанный на граничном кризисе хаотического аттрактора в быстрой подсистеме.

2. Впервые для сетей хаотических активных элементов показано, что архитектура «малого мира» обеспечивает максимальную нелокальную («бас-

сейновую») устойчивость режима синхронизации. Введён и применён концептуальный аппарат «гиперсети» для описания динамики в адаптивных сетях.

3. Обнаружен и исследован механизм выполнения вычислений в хаотических рекуррентных сетях, основанный на формировании в процессе обучения управляемых непритягивающих переходных траекторий, детерминированно активируемых внешним стимулом.

4. Впервые установлено, что парадигма обучения является определяющим фактором для формируемой функциональной динамики: обучение с подкреплением, в отличие от обучения с учителем, способствует спонтанному возникновению нетривиальной структуры фазового пространства, содержащего как неподвижные точки, так и квазипериодические аттракторы.

5. Впервые продемонстрировано, что обучение стандартной рекуррентной сети на когнитивных задачах приводит к спонтанной самоорганизации как функциональной архитектуры (разделение на специализированные популяции), так и динамического ландшафта (формирование точечных, линейных и кольцевых аттракторов), воспроизводящих ключевые принципы организации нейронных сетей мозга.

6. Впервые для анализа спайковой активности обученных нейронных сетей применён аппарат топологического анализа данных и показано, что различные вычислительные функции соответствуют уникальным топологическим характеристикам коллективной динамики.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в развитии теории нелинейной динамики сложных, адаптивных и обучаемых систем. Полученные результаты вносят вклад в понимание фундаментальных принципов вычислений в распределённых системах, устанавливая связь между методами машинного обучения и физическими механизмами формирования функциональных динамических режимов. Установленные закономерности возникновения различных типов аттракторов в обучаемых сетях открывают новое направление в теории синтеза многомерных динамических систем с заданными свойствами.

Практическая значимость результатов связана с их потенциальным применением при разработке новых вычислительных архитектур и алгоритмов, в частности в области нейроморфных вычислений. Установленные закономерности спонтанного формирования функциональных модулей и структурированного аттракторного ландшафта закладывают физическую основу для разработки новых подходов к созданию адаптивных и автономных интеллектуальных систем. Разработанные подходы к анализу многомерной динамики обучаемых сетей представляют собой новый инструментарий для исследователей в области как искусственных, так и биологических нейронных систем. Эти методы позволяют переходить от феноменологического описания работы нейросетевых моделей к выявлению лежащих в их основе динамических механизмов, что имеет прямое отношение к актуальной задаче построения объяснимого искусственного интеллекта.

Методология и методы исследования

Работа основана на сочетании аналитических методов теории нелинейных колебаний и бифуркаций, численного моделирования многомерных динамических систем на высокопроизводительных вычислительных кластерах, а также методов машинного обучения (обучение с учителем и обучение с подкреплением). Для анализа результатов применялись современные подходы, включая методы статистического анализа, теории сложных сетей и топологического анализа данных.

Положения, выносимые на защиту

1. В классе дискретных быстро-медленных систем с хаотической быстрой подсистемой формируется нетривиальный аттрактор, реализующий колебательный режим с чередованием медленных регулярных и быстрых хаотических движений.

2. Периодическая модуляция управляющего параметра нелинейного отображения в закритической области, где хаотический аттрактор разрушен в результате граничного кризиса, но сохраняется непритягивающее хаотическое множество, приводит к качественно различным режимам затухания переходного хаоса: экспоненциальному при низких и высоких частотах модуляции, и осциллирующему при промежуточных частотах.

3. Нелокальная робастность синхронизации хаотических бёрстовых колебаний в сетях нелинейных осцилляторов, измеряемая так называемой «бассейновой» устойчивостью, оптимальна для топологии «малого мира» и немонотонно зависит от вероятности перестройки связей, их плотности,

силы связи и параметров динамики элементов.

4. В адаптивной сети спайковых осцилляторов с событийной перестройкой структуры связей возникает множество метастабильных кластерных состояний, переходы между которыми описываются формализмом гиперсети. В автономном режиме система демонстрирует случайное блуждание по графу метастабильных кластерных конфигураций, а при приложении постоянного стимулирующего воздействия к одному из элементов траектория сходится к стимул-специфичному воспроизводимому циклу кластерных переключений.

5. В резервуарных сетях (нелинейных сетях с фиксированными рекуррентными связями) с обратной связью обучение линейного выходного сумматора приводит к формированию в спектре эффективной матрицы связей спектральных выбросов (собственных значений, выходящих за пределы спектрального круга исходной случайной матрицы), определяющих доминирующие моды аттрактора сети в отсутствие внешнего сигнала. Для стимул-индуцированных задач та же архитектура сохраняет хаотический фон и реализует вычисления на детерминированных метастабильных траекториях, активируемых внешними воздействиями.

6. Эффективность решения задачи резервуарной сетью определяется соответствием между топологией и геометрией внутреннего представления в пространстве состояний и скрытой структурой задачи. Для задачи детектирования фазовой когерентности с циклической скрытой переменной осцилляторные активные элементы обеспечивают существенное преимущество в минимальном размере сети благодаря формированию геометрически неискажённого циклического представления.

7. Различие между резервуарными сетями с фиксированными рекуррентными связями и полностью обучаемыми рекуррентными сетями с специализированными «вентильными» механизмами заключается в качественном изменении структур фазового пространства. Полное обучение специализированных рекуррентных сетей формирует компактные низкоразмерные представления с глобальным разделением контекстов задачи, тогда как фиксированный резервуар использует высокоразмерное представление с перекрывающимися областями различных контекстов, что ограничивает его эффективность на задачах, требующих длительного хранения информации.

8. В полностью обучаемых рекуррентных сетях (нелинейных сетях активных элементов с настройкой всех или основных весовых параметров) тип решаемой задачи определяет структуру фазового пространства и функциональную самоорганизацию популяций элементов. Для задач выбора формируются дискретные аттракторы и конкурирующие популяции с архитектурой взаимного подавления; для задач интеграции непрерывных переменных — непрерывное кольцевое аттракторное многообразие с разделением на подсистему хранения и подсистему управления; для режима выполнения нескольких целевых функций — кластерная организация с функционально специализированными группами элементов и переключаемыми метастабильными состояниями в фазовом пространстве.

9. Способ обучения нелинейной сети является одним из параметров, определяющих качественную структуру её фазового пространства. При сопоставлении обучения с подкреплением и обучения с учителем на идентичных задачах контекстно-зависимого принятия решений при сопоставимой

точности, обучение с подкреплением формирует структуры фазового пространства, сочетающие устойчивые неподвижные точки с квазипериодическими аттракторами, и порождает конкурирующие популяции элементов с приблизительно равной численностью. Обучение с учителем преимущественно сводит динамику к неподвижным точкам и порождает популяции с существенно различающейся численностью.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью математических постановок задач, применением апробированных аналитических и численных методов, согласованностью результатов, полученных различными методами, а также сравнением с известными теоретическими и экспериментальными данными.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах отдела 310 и отделения нелинейной динамики и оптики ИПФ РАН, а также представлялись автором на всероссийских и международных конференциях, в том числе на International Conference on Nonlinear Maps 2015 (Дублин, Ирландия), 2017 (Нижний Новгород, Россия), XIII International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2015 (Родос, Греция), XVII Научной школе ”Нелинейные волны – 2016” (Нижний Новгород, Россия), International Conference ”Shilnikov Workshop” 2016, 2022 (Нижний Новгород, Россия), XI Международной школе-конференции ”Хаос – 2016” (Саратов, Россия), XXXVII International Conference ”Dynamics Days Europe” 2017 (Сегед, Венгрия), V Международном симпозиуме ”Topical Problems of Nonlinear Wave Physics NWP–2017” (Москва – Санкт-Петербург, Россия), XXI CHAOS International Conference 2018 (Рим, Италия), Международной конференции ”Динамические системы в науке и

технологиях” DSST-2018 (Алушта, Россия), International School in Computational and Theoretical Models in Neuroscience ”ContamiNeuro 2019” (Венеция, Италия), X International Conference on Complex Networks ”CompleNet 2019” (Таррагона, Испания), XV International Conference ”Dynamical Systems - Theory and Applications” DSTA 2019 (Лодзь, Польша), NENGO summer school on large-scale brain modelling and neuromorphic computing 2019 (Ватерлоо, Канада), International Conference ”Dynamics Days Digital” 2020 (онлайн), I Online Conference on Nonlinear Dynamics and Complexity 2020 (онлайн), I Национальном Конгрессе по когнитивным исследованиям, искусственному интеллекту и нейроинформатике 2020 (онлайн), International Conference Volga Neuroscience Meeting 2021 (Нижний Новгород, Россия), Международномо научном форуме ”Балтийский форум: Нейронауки, искусственный интеллект и сложные системы” 2022, 2023 (Калининград, Россия) Международной научно-технической конференции ”Нейроинформатика-2022” (Долгопрудный, Россия), International Conference ”Dynamics Days US 2023” (онлайн), Международной конференции по искусственному интеллекту Open-Talks.AI 2023 (Ереван, Армения), Российском форуме ”Микроэлектроника 2023” (Сочи, Россия), XXXIII Annual Computational Neuroscience Meeting CNS 2024 (Натал, Бразилия), XXVI Харитоновских тематических научных чтениях ”Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах” 2025 (Саров, Россия), VI International Conference on Mathematics of Neuroscience and AI 2025 (Сплит, Хорватия), International Joint Conference on Neural Networks IJCNN 2025 (Рим, Италия), XXXIV Annual Computational Neuroscience Meeting CNS 2025 (Флоренция, Италия), VII Международном симпозиуме ”Topical Problems of Nonlinear Wave Physics NWP 2025” (Москва – Санкт-Петербург, Россия).

Личный вклад автора

Все основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично или при его определяющем участии. Личный вклад автора состоит в постановке задач, разработке математических моделей, проведении аналитических и численных исследований, анализе и интерпретации результатов, подготовке публикаций по теме диссертации.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность научному консультанту, член-корреспонденту РАН В. И. Некоркину за постановку задач, постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения.

Автор благодарит коллег по отделу нелинейной динамики ИПФ РАН — В.В. Клиньшова, Д.С. Щапина, Д.В. Касаткина, С.Ю. Кириллова, А.С. Дмитричева, Р.А. Кононова, А.А. Емельянову за стимулирующую научную атмосферу и ценные замечания.

Автор выражает благодарность семье: Наталье Михайловне, Ирине Игоревне, Ярославу, Платону, Елизавете, Галине Львовне, Игорю Александровичу, Елене Александровне, Анастасии Игоревне за терпение, понимание и неизменную поддержку.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Функциональные свойства нелинейной сети определяются динамическими режимами составляющих её элементов и способами их коллективной организации. Прежде чем исследовать коллективную динамику (Глава 2) и механизмы формирования функциональности при обучении (Главы 3 и 4), необходимо установить, какими режимами обладает одиночный элемент, как эти режимы зависят от параметров, каким единым аппаратом они описываются и как соотносятся друг с другом модели различного уровня детализации.

Настоящая глава решает эту задачу в три этапа. В разделе 1.1 описываются модели активных элементов, используемых в диссертации, устанавливаются связи между ними и формулируется единый аппарат динамического анализа. В разделе 1.2 развивается теория хаотических бёрстовых колебаний в дискретных быстро–медленных системах: строится инвариантная область, доказывающая существование быстро–медленного аттрактора, и дается аналитическая оценка его хаотичности. В разделе 1.3 исследуется управляемость переходного хаоса периодической модуляцией параметра: выводится аналитическое приближение для вероятности выживания хаотической динамики и строится карта времён жизни хаоса в пространстве параметров воздействия.

1.1. Модели активных элементов: классификация и методы описания

1.1.1. Введение

Функциональные свойства нелинейной сети определяются динамическими режимами составляющих её элементов и способами их коллективной организации. Как было отмечено во введении, центральная задача диссертации — установить, каким образом обучение трансформирует фазовое пространство многомерной системы, формируя аттракторные структуры, необходимые для выполнения целевых функций. Решение этой задачи требует, прежде всего, точного указания того, *из каких элементов* построены исследуемые сети и *каким единым языком* описываются их динамические свойства.

Задача настоящего раздела — дать единое описание всех моделей активных элементов, используемых в Главах 1–4, установить связи между ними через предельные переходы и упрощения, определив границы применимости каждой, и ввести общую терминологию (аттракторы, бифуркации, показатели Ляпунова, бассейны притяжения), в рамках которой формулируются результаты всей диссертации.

В работе используются одиннадцать конкретных моделей, разделяемых на две группы по уровню физической интерпретации.

Модели с физической интерпретацией переменных (п. 1.1.2 и 1.1.3) сохраняют прямое соответствие с измеримыми физическими величинами: переменные имеют смысл напряжения, тока, комплексной амплитуды или фазы, а параметры — ёмкости, сопротивления, частоты, постоянной времени. К этой группе относятся: дискретная модель Курбажа–Некоркина (1.1), модели с правилом сброса LIF (1.2) и AdEx (1.3), система ФитцХью–Нагумо (1.4), осцилляторы Стюарта–Ландау (1.5) и Баутина (1.6), фазовый осциллятор Курамото (1.7).

Абстрактные (редуцированные) модели (п. 1.1.4) описывают элемент как нелинейный преобразователь без привязки к конкретному физическому субстрату; переменные — абстрактные активации, параметры — весовые матрицы и смещения. К этой группе относятся: частотная модель (1.8), рекуррентные ячейки ESN (1.10), GRU (1.11), LSTM (1.12).

Заметим, что в радиофизике элементами нелинейных сетей являются генераторы, осцилляторы и возбудимые системы; в теории нейронных сетей — «нейроны» различных типов. В настоящей работе используется объединяющий термин «активный элемент», подчёркивающий общее свойство: способность генерировать нетривиальный выходной сигнал за счёт внутреннего источника энергии.

1.1.2. Модели с физической интерпретацией переменных: импульсные элементы

Дискретная быстро–медленная модель Курбажа–Некоркина (КН). Двумерное быстро–медленное отображение [34—36]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + F_{\text{cub}}(x_n) - \beta\, H(x_n - d) - y_n + I_n, \\ y_{n+1} = y_n + \varepsilon\,(x_n - J), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $F_{\text{cub}}(x) = x(x-a)(1-x)$ — кубическая нелинейность, $H(\cdot)$ — функция Хевисайда, $0 < \varepsilon \ll 1$ — параметр разделения временны́х масштабов, J — параметр возбудимости, I_n — внешнее воздействие (от других элементов сети или от внешнего источника сигнала).

Модель построена на основе дискретной версии системы ФитцХью–Нагумо [2, 37] с дополнительно введённым разрывом $-\beta\, H(x_n - d)$. Переменная x

является дискретным аналогом мембранного потенциала (или, в электронной реализации, напряжения на нелинейном элементе), y — медленной восстанавливающей переменной, связанной с динамикой медленных ионных токов (или тока через индуктивность в электронной цепи). Кубическая нелинейность F_{cub} воспроизводит характерную N-образную форму вольт-амперной характеристики возбудимого элемента. Разрывная добавка $-\beta\, H(x_n - d)$ моделирует пороговый характер генерации импульса: при превышении переменной x критического уровня d происходит скачкообразное изменение правой части, имитирующее быструю деполяризацию. Именно этот разрыв обеспечивает существование хаотических режимов, отсутствующих в гладких двумерных системах [35], поскольку быстрая подсистема модели при определённых значениях параметров является отображением лоренцевского типа [38].

Параметры и их роль. Параметр a контролирует форму кубической нелинейности и, следовательно, форму генерируемых сигналов. Параметры β и d определяют амплитуду скачка и пороговое значение, влияя на число спайков в пачке или бёрсте и глубину модуляции. Параметр ε задаёт отношение быстрого и медленного масштабов и тем самым — период колебаний. Параметр J характеризует возбудимость: при его изменении система проходит через последовательность бифуркаций, определяющих тип динамического режима.

Репертуар режимов. В зависимости от параметров модель (1.1) воспроизводит широкий набор режимов, наблюдаемых в реальных нейронных генераторах [4]:

- *Возбудимый режим* — устойчивое равновесие с пороговым откликом на надпороговое возмущение. Элемент «молчит» до прихода достаточно силь-

ного входного сигнала и генерирует одиночный импульс в ответ на него.

- *Регулярные спайковые колебания* — периодические колебания с одним импульсом за период. Простейший автоколебательный режим; частота определяется параметрами ε и J.

- *Низкоамплитудные подпороговые колебания* — квазигармонические колебания вблизи равновесия, амплитуда которых не достигает порога генерации спайка.

- *Хаотические бёрстовые колебания* — нерегулярное чередование хаотических пачек импульсов и фаз покоя. Механизм: медленная переменная y квазистатически проводит быструю подсистему через область существования *хаотического* аттрактора, ограниченную седло-узловой бифуркацией и граничным кризисом. Этот режим — основной предмет раздела 1.2.

Существенно, что в модели КН (1.1) бёрстовые колебания являются *хаотическими*: регулярные (строго периодические) бёрстовые колебания в данной модели не реализуются, поскольку быстрая подсистема в активной фазе является отображением лоренцевского типа с хаотическим аттрактором. Это качественно отличает модель КН от непрерывных быстро-медленных систем (типа Хиндмарш–Роуза), в которых типичны регулярные бёрстовые колебания.

Структурная устойчивость. Одно из ключевых свойств модели (1.1) — *структурная устойчивость* хаотического аттрактора: основные характеристики (период T, длительность активной фазы T_{act}, число спайков в пачке N_{spb}) являются гладкими функциями параметров ε и J в широком диапазоне значений. Это обеспечивает робастность к малым вариациям параметров при использовании

модели в качестве элемента сети. Робастность здесь подразумевает качественное сохранение динамических режимов не только при возмущении параметров динамической системы, но и при различных инициализациях структуры самих сетевых систем.

Использование в диссертации. Модель (1.1) — основной объект Главы 1 (разделы 1.2 и 1.3) и элемент сетей в Главе 2 (синхронизация бёрстовых колебаний, адаптивные сети, гиперсети).

Пороговые модели с непрерывным временем (LIF, AdEx)

Модель накопление–сброс с утечкой (leaky integrate-and-fire, LIF). Простейшая модель порогового элемента с непрерывным временем [39, 40]:

$$\tau_m \dot{V} = -(V - V_{\text{rest}}) + R\,I(t), \qquad \text{если } V \geqslant V_{\text{th}}: \quad V \to V_{\text{reset}}, \qquad (1.2)$$

где V — мембранный потенциал, $\tau_m = RC$ — постоянная времени мембраны, R — входное сопротивление, V_{rest} — потенциал покоя, V_{th} — порог генерации, V_{reset} — потенциал сброса.

Название модели отражает её принцип действия: входной ток $I(t)$ *накапливает* заряд на ёмкости мембраны (integrate), при достижении порога происходит *сброс* (fire), а в промежутках ток утечки $-(V - V_{\text{rest}})/\tau_m$ возвращает потенциал к уровню покоя.

Между спайками динамика линейна (экспоненциальное стремление к V_{rest}), нелинейность сосредоточена в правиле сброса. Это делает модель LIF аналитически прозрачной и эффективной для численного моделирования, но ограничивает репертуар режимов: LIF воспроизводит возбудимость и тонические спай-

ковые колебания, но не бёрстовые колебания и не адаптацию частоты.

Адаптивная экспоненциальная модель (AdEx). Расширенная версия модели LIF с экспоненциальным механизмом генерации спайка и адаптационной переменной [41]:

$$\begin{cases} C\,\dot{V} = -g_L(V - E_L) + g_L\Delta_T \exp\left(\dfrac{V - V_T}{\Delta_T}\right) - w + I(t), \\ \tau_w\,\dot{w} = a(V - E_L) - w, \end{cases} \tag{1.3}$$

с правилом сброса: при $V \geqslant V_{\text{cut}}$ выполняется $V \to V_r$, $w \to w + b$. Здесь C — ёмкость мембраны, g_L — проводимость утечки, E_L — потенциал покоя, V_T — пороговый потенциал, Δ_T — параметр крутизны экспоненциального тока, w — адаптационная переменная (описывает медленные калиевые токи), τ_w — постоянная времени адаптации, a — подпороговая адаптация, b — надпороговое приращение адаптации.

Модель AdEx является двумерной быстро–медленной системой с разрывом (правило сброса) — в этом смысле она структурно аналогична модели КН (1.1), но с непрерывным временем. В зависимости от параметров (a, b) AdEx воспроизводит [42]: тонические спайковые колебания, адаптацию частоты, начальную пачку импульсов, регулярные бёрстовые колебания, нерегулярные спайковые колебания, задержанный ответ — всего порядка 10 различных паттернов генерации.

Использование в диссертации. LIF и AdEx применяются в Главах 3–4: как элементы в спайковых резервуарах (Глава 3) и в обучаемых сетях с суррогатными градиентами (Главы 3–4). Ключевая роль медленной адаптации для реализации рабочей памяти установлена в разделе 4.3.

1.1.3. Модели с физической интерпретацией переменных: осцилляторные и возбудимые генераторы

Система ФитцХью–Нагумо Классическая модель возбудимого генератора [2, 37], допускающая непосредственную электронную реализацию:

$$\begin{cases} C\,\dot{U} = F(U) - i + I_{\text{ext}}, \\ L\,\dot{i} = U - R\,i - E_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

где U — напряжение на нелинейном элементе (аналог мембранного потенциала), i — ток через индуктивность (аналог восстанавливающей переменной), $F(U)$ — кубическая вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, C, L, R, E_0 — параметры цепи.

Система (1.4) является двумерной быстро–медленной (при $C \ll L/R$) и демонстрирует два основных режима: *возбудимый* (устойчивое равновесие с пороговым откликом — в этом режиме модель генерирует одиночные импульсы, качественно аналогичные спайкам моделей LIF и AdEx) и *автоколебательный* (устойчивый предельный цикл после бифуркации Андронова–Хопфа — непрерывные периодические колебания).

Связь с моделью КН. Дискретная модель (1.1) является дискретизацией системы (1.4) с добавлением порогового разрыва. Переменные $x \leftrightarrow U$, $y \leftrightarrow i$ играют аналогичные роли; кубическая нелинейность F_{cub} соответствует характеристике $F(U)$. Различие состоит в том, что дискретизация и разрыв обеспечивают существование хаотических аттракторов в двумерном фазовом пространстве, тогда как непрерывная система (1.4) на плоскости допускает лишь равновесия и предельные циклы (теорема Пуанкаре–Бендиксона).

Аппаратная реализация. Модель (1.4) — единственная в диссертации, для которой выполнена *физическая реализация* в виде цепочки из 16 связанных электронных генераторов (Глава 3, раздел 3.4). Каждый генератор представляет собой аналоговую электронную схему, воспроизводящую нелинейную характеристику $F(U)$ посредством операционных усилителей и диодов. Связи между генераторами — резистивные, с фиксированной структурой соединений (линейная цепочка).

Осцилляторы Стюарта–Ландау и Баутина

Осциллятор Стюарта–Ландау. В сети осцилляторов Стюарта–Ландау

$$\dot{z}_i = (\lambda_i + i\omega_i - |z_i|^2)\, z_i + \sum_j C_{ij}\, z_j, \tag{1.5}$$

каждый узел представляет собой нормальную форму суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа [43], где $z_i \in \mathbb{C}$ — комплексная амплитуда i-го осциллятора, λ_i — параметр надкритичности (управляет бифуркацией), ω_i — собственная частота, C_{ij} — комплексная матрица связей.

При $\lambda < 0$ единственный аттрактор осциллятора — устойчивое равновесие $z = 0$ (затухающие колебания с характерным временем $1/|\lambda|$). При $\lambda > 0$ — устойчивый предельный цикл $|z| = \sqrt{\lambda}$ с частотой ω; равновесие теряет устойчивость. Переход через $\lambda = 0$ — суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа.

Осциллятор Баутина. Для описания более сложного коллективного режима (пространственного хаоса) в Главе 2 используется обобщённый осциллятор Стю-

арта–Ландау коразмерности 2 (нормальная форма бифуркации Баутина) [44]:

$$\dot{z}_i = (\lambda_i + i\omega_i + \eta_i|z_i|^2 - |z_i|^4)\, z_i + \sum_j C_{ij}\, z_j, \tag{1.6}$$

где η_i — дополнительный параметр, знак которого определяет характер бифуркации: при $\eta > 0$ бифуркация субкритическая (с гистерезисом), при $\eta < 0$ — суперкритическая (модель (1.5) является частным случаем при $\eta = -1$ после перемасштабирования). Модель Баутина (1.6) позволяет описать бистабильность «равновесие + предельный цикл» в рамках нормальной формы.

Связь с другими моделями. Осциллятор Стюарта–Ландау (1.5) является нормальной формой для *любой* системы, претерпевающей суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа, — в том числе для системы ФитцХью–Нагумо (1.4) вблизи порога автоколебаний. Это обеспечивает универсальность результатов, полученных для (1.5), при переносе на физически более детальные модели.

Использование в диссертации. Осцилляторы Стюарта–Ландау и Баутина используются в Главе 2 (мультиплексные сети, доменные структуры).

Фазовый осциллятор Курамото В пределе слабой связи и малого разброса амплитуд из осциллятора Стюарта–Ландау (1.5) выводится фазовая модель Курамото [43]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.7}$$

где $\theta_i \in [0, 2\pi)$ — фаза i-го осциллятора, ω_i — собственная частота, K — сила связи.

В модели Курамото динамика каждого осциллятора описывается единственной переменной — фазой θ_i, что является предельным упрощением по

сравнению с полной амплитудно-фазовой динамикой модели Стюарта–Ландау. Это упрощение справедливо, когда амплитуды колебаний близки к стационарным значениям $|z_i| \approx \sqrt{\lambda_i}$ и изменяются значительно медленнее фаз [43, 45].

Модель Курамото (1.7) — каноническая модель для исследования синхронизации в ансамблях осцилляторов. При увеличении параметра связи K система претерпевает переход от десинхронизованного состояния (хаотическое распределение фаз) к частичной и полной синхронизации, количественно характеризуемой параметром порядка $r = |N^{-1} \sum_j e^{i\theta_j}|$.

Использование в диссертации. Модель Курамото (1.7) применяется в Главе 3 для анализа осцилляторных резервуарных сетей, в которых циклическая структура фазового пространства определяет вычислительные свойства субстрата. Цепочка предельных переходов ФХН $\to$ Стюарта–Ландау $\to$ Курамото позволяет переносить результаты, полученные для фазовой модели, на физически более детальные системы.

1.1.4. Абстрактные непрерывные модели и рекуррентные архитектуры

Модели этого класса абстрагированы от конкретных физических процессов и описывают элемент как нелинейный преобразователь входного сигнала. При утрате прямой физической интерпретации отдельных переменных эти модели остаются нелинейными динамическими системами и могут быть проанализированы на языке аттракторов, бифуркаций и показателей Ляпунова.

Частотная модель Частотная модель (rate model) — простейшая непрерывная абстрактная модель активного элемента [40, 46], в которой переменная состояния x_i описывает не мгновенное значение мембранного потенциала, а среднюю

частоту генерации импульсов i-го элемента (или i-й популяции), усреднённую по времени и/или по ансамблю. Название «частотная модель» (или rate model в англоязычной литературе) подчёркивает эту интерпретацию. Динамика описывается системой [40, 46]:

$$\tau \dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij}\, \varphi(x_j) + I_i(t), \qquad i = 1, \dots, N, \tag{1.8}$$

где x_i — переменная состояния i-го элемента, W_{ij} — вес связи от элемента j к элементу i, $\varphi(\cdot)$ — нелинейная функция активации, $\tau > 0$ — постоянная времени (характерное время усреднения), $I_i(t)$ — входное воздействие.

Типичные функции активации:

- $\varphi(x) = \tanh(x)$ — гладкая сигмоидная нелинейность, ограниченная на интервале $(-1, 1)$;
- $\varphi(x) = \mathrm{ReLU}(x) = \max(0, x)$ — кусочно-линейная функция, широко используемая в машинном обучении.

Связь со спайковыми моделями. Частотная модель (1.8) может быть получена из ансамбля спайковых элементов (LIF или AdEx) путём усреднения суммарной спайковой активности по временно́му окну $\Delta t \gg \tau_m$ и по популяции [40]. Нелинейность φ при этом играет роль кривой «вход–частота» одиночного элемента — зависимости средней частоты генерации импульсов от величины постоянного входного тока. Этот переход обосновывает использование частотных моделей для эффективного описания динамики больших нейронных популяций.

Динамика одного элемента. В случае одиночного элемента ($N = 1$, $W_{11} = w$) система (1.8) сводится к одномерному уравнению

$$\tau\,\dot{x} = -x + w\,\varphi(x) + I(t). \tag{1.9}$$

При $\varphi = \tanh$ и $I = 0$: для $|w| \leqslant 1$ существует единственное устойчивое равновесие $x^* = 0$; при $|w| > 1$ в системе возникает бистабильность — два устойчивых равновесия $x^*_{\pm} \neq 0$ и неустойчивое $x^* = 0$.

Динамика в сети. При $N \gg 1$ коллективная динамика системы (1.8) качественно определяется спектральными свойствами матрицы весов $\mathbf{W}$. Для случайных матриц гауссового ансамбля с нулевым средним и дисперсией g^2/N существует критическое значение $g = g_c = 1$ [12]: при $g < g_c$ единственный аттрактор — неподвижная точка $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$; при $g > g_c$ возникает хаотический аттрактор. Этот переход «порядок–хаос» играет ключевую роль при настройке параметров в задачах резервуарных вычислений (Глава 3).

Дискретизация и рекуррентные ячейки: ESN, GRU, LSTM При численной реализации система (1.8) дискретизируется по времени с шагом Δt, что приводит к рекуррентному отображению. Простейшая дискретизация (схема Эйлера с $\Delta t/\tau \to 1$) даёт

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi\big(\mathbf{W}\,\mathbf{x}_n + \mathbf{U}\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}\big), \tag{1.10}$$

где $\mathbf{s}_n$ — внешний входной сигнал, $\mathbf{U}$ — матрица входных весов, $\mathbf{b}$ — вектор смещения. Уравнение (1.10) — стандартная *ячейка Элмана* (простая рекуррентная сеть, vanilla RNN), лежащая в основе резервуарных вычислений в Главе 3.

Существенно отметить роль нелинейности в уравнении (1.10): функция

активации φ применяется к *сумме* взвешенных внутренних состояний $\mathbf{W}\mathbf{x}_n$, входного сигнала $\mathbf{U}\mathbf{s}_n$ и смещения $\mathbf{b}$. Это стандартная архитектура, используемая при полном обучении всех параметров сети (Главы 3–4). В ряде задач, однако, используется иная схема, в которой нелинейность применяется *только к внутренним состояниям*, а входной сигнал и обратная связь от выходного (считывающего) слоя подаются аддитивно вне нелинейности: $\mathbf{x}_{n+1} = \varphi(\mathbf{W}\mathbf{x}_n) + \mathbf{U}\mathbf{s}_n + \mathbf{F}\mathbf{y}_n$. Такая архитектура характерна для метода FORCE [21] (Глава 3, 3.1–3.2), где обратная связь $\mathbf{F}\mathbf{y}_n$ через выходной линейный сумматор замыкает контур автогенератора. Выбор архитектуры влияет на то, какие динамические режимы могут формироваться в обученной сети, и обсуждается в соответствующих разделах.

В модели *эхо-сети* (Echo State Network, ESN) [19, 22] матрица $\mathbf{W}$ фиксирована («резервуар» — нелинейная рекуррентная сеть с фиксированными внутренними связями), а обучается лишь линейный считывающий слой (выходной линейный сумматор) $\mathbf{y}_n = \mathbf{V}\,\mathbf{x}_n$. С позиций нелинейной динамики ESN — это нелинейная система (1.10) с фиксированными параметрами $(\mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{b})$, из которой извлекается линейная функция состояния.

Ограничение простой ячейки (1.10) — *проблема затухающих и взрывающихся градиентов*: при обучении методом обратного распространения ошибки во времени (BPTT — back-propagation through time) произведения якобианов $\prod_k \partial\mathbf{x}_{k+1}/\partial\mathbf{x}_k$ экспоненциально растут или убывают с ростом длины последовательностей, что затрудняет устанавливать в них долговременную зависимость. Это мотивировало создание ячеек с *вентильными механизмами* (gating mechanisms) — мультипликативными нелинейностями, управляющими потоком сигнала между компонентами скрытого состояния. Термин «вентильный» (от англ. gate — затвор, вентиль) подчёркивает функцию этих механизмов: они «от-

крывают» или «закрывают» каналы передачи сигнала аналогично тому, как вентиль управляет потоком в физической системе.

Ячейка GRU (Gated Recurrent Unit — вентильная рекуррентная единица) [47].

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_n &= \sigma\big(\mathbf{W}_r\,\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{U}_r\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_r\big),\\
\mathbf{z}_n &= \sigma\big(\mathbf{W}_z\,\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{U}_z\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_z\big),\\
\tilde{\mathbf{x}}_n &= \tanh\big(\mathbf{W}_h\,(\mathbf{r}_n \odot \mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{U}_h\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_h\big),\\
\mathbf{x}_n &= (1 - \mathbf{z}_n) \odot \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{z}_n \odot \tilde{\mathbf{x}}_n,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\sigma(\cdot)$ — логистическая сигмоида ($\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$), $\odot$ — поэлементное умножение (произведение Адамара), $\mathbf{r}_n$ — вентиль сброса (reset gate), $\mathbf{z}_n$ — вентиль обновления (update gate).

С позиций нелинейной динамики, ячейка GRU — это нелинейная дискретная система с *мультипликативным управлением эффективной постоянной времени*: вентиль обновления $\mathbf{z}_n$ поэлементно интерполирует между предыдущим состоянием $\mathbf{x}_{n-1}$ и кандидатом $\tilde{\mathbf{x}}_n$. При $z_{i,n} \approx 0$ i-я компонента состояния сохраняется почти без изменений (долговременная память); при $z_{i,n} \approx 1$ — полностью обновляется.

Ячейка LSTM (Long Short-Term Memory — долгая краткосрочная память) [48].

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_n &= \sigma\big(\mathbf{W}_f\,\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{U}_f\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_f\big),\\
\mathbf{i}_n &= \sigma\big(\mathbf{W}_i\,\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{U}_i\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_i\big),\\
\mathbf{o}_n &= \sigma\big(\mathbf{W}_o\,\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{U}_o\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_o\big),\\
\tilde{\mathbf{c}}_n &= \tanh\big(\mathbf{W}_c\,\mathbf{h}_{n-1} + \mathbf{U}_c\,\mathbf{s}_n + \mathbf{b}_c\big),\\
\mathbf{c}_n &= \mathbf{f}_n \odot \mathbf{c}_{n-1} + \mathbf{i}_n \odot \tilde{\mathbf{c}}_n,\\
\mathbf{h}_n &= \mathbf{o}_n \odot \tanh(\mathbf{c}_n),
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

где $\mathbf{c}_n$ — вектор состояния ячейки памяти (cell state), $\mathbf{h}_n$ — скрытое состояние (выход), $\mathbf{f}_n$, $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{o}_n$ — вентили забывания, входа и выхода соответственно.

LSTM вводит *отдельную линию памяти* $\mathbf{c}_n$, обновляемую аддитивно (а не через нелинейную функцию активации), что обеспечивает почти беспрепятственный поток градиентов вдоль временно́й оси. Это решает проблему затухающих градиентов, но ценой удвоения размерности скрытого состояния: полное состояние ячейки — пара $(\mathbf{c}_n, \mathbf{h}_n)$.

Связь между RNN, GRU и LSTM как нелинейными динамическими системами. Все три архитектуры — частные случаи общего нелинейного рекуррентного отображения

$$
\mathbf{x}_n = \mathcal{F}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{s}_n; \theta),
\tag{1.13}
$$

различающиеся структурой функции $\mathcal{F}$ и набором параметров θ. Простая RNN (1.10) содержит один набор весов $\theta = (\mathbf{W}, \mathbf{U}, \mathbf{b})$. GRU (1.11) — три набора $(\mathbf{W}_{r,z,h}$, $\mathbf{U}_{r,z,h}$, $\mathbf{b}_{r,z,h})$. LSTM (1.12) — четыре набора $(\mathbf{W}_{f,i,o,c}$, $\mathbf{U}_{f,i,o,c}$, $\mathbf{b}_{f,i,o,c})$ и дополнительную переменную состояния $\mathbf{c}_n$.

С точки зрения динамического анализа, ключевое различие состоит в *спек-*

тре якобиана $\partial \mathbf{x}_n / \partial \mathbf{x}_{n-1}$. Для простой RNN якобиан содержит множитель $\mathrm{diag}(\varphi') \cdot \mathbf{W}$, спектральный радиус которого определяет границу между устойчивым и хаотическим режимами [12]. Для GRU и LSTM вентильные механизмы модулируют собственные значения якобиана на каждом шаге, удерживая их вблизи единичной окружности и тем самым стабилизируя долговременную динамику. Именно это свойство делает архитектуры с вентилями более эффективными для задач с длинными временны́ми зависимостями.

Использование в диссертации. Простая RNN / ESN — основа резервуарных вычислений (Глава 3). GRU и LSTM — объекты сравнения с ESN (Глава 3, 3.5). Во всех случаях анализ обученных сетей ведётся на едином языке: аттракторы, бифуркации, показатели Ляпунова, популяционная специализация скрытых состояний.

1.1.5. Связи между моделями: предельные переходы и упрощения

Модели, описанные выше, не являются изолированными, а связаны предельными переходами, образующими *иерархию упрощений*.

1. *Усреднение по времени и по популяции (импульсные элементы $\to$ частотная модель).* Рассмотрим популяцию из $M \gg 1$ однотипных импульсных элементов (LIF или AdEx). При усреднении суммарной спайковой активности по временно́му окну $\Delta t \gg \tau_m$ и по популяции получается переменная $x_i \approx \langle r_i \rangle$, описываемая уравнением типа (1.8), где φ играет роль кривой «вход–частота» одиночного элемента [40]. Этот переход обосновывает использование частотных моделей как эффективного описания больших популяций.

2. *Дискретизация по времени (непрерывное → дискретное).* Частотная модель (1.8) при дискретизации с шагом Δt по схеме Эйлера переходит в отображение вида (1.10). Аналогично, непрерывная система ФитцХью–Нагумо (1.4) при дискретизации и добавлении порогового разрыва переходит в модель КН (1.1) [34]. Дискретизация не изменяет класс системы (нелинейная динамическая система), но может порождать новые динамические эффекты: в частности, пороговый разрыв в модели КН обеспечивает существование хаотических аттракторов в двумерном фазовом пространстве, невозможных для гладких непрерывных систем на плоскости (теорема Пуанкаре–Бендиксона).

3. *Добавление вентильных механизмов (RNN → GRU, LSTM).* Дискретная ячейка (1.10) расширяется мультипликативными вентилями (1.11) или (1.12), которые управляют эффективной постоянной времени каждой компоненты состояния. Это не изменяет класс системы (нелинейное отображение), но модифицирует спектр якобиана, стабилизируя долговременную динамику: вентили удерживают собственные значения якобиана вблизи единичной окружности, что облегчает обучение на длинных последовательностях.

4. *Переход к нормальной форме (ФХН → Стюарта–Ландау → Баутина → Курамото).* Вблизи суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа система ФХН (1.4) редуцируется к нормальной форме (1.5) (осциллятор Стюарта–Ландау). Учёт следующего порядка нелинейности приводит к обобщённой модели Баутина (1.6) (нормальная форма коразмерности 2), описывающей как суперкритическую, так и субкритическую бифуркации. В пределе слабой связи и малого разброса частот из (1.5) выводится фазо-

вая модель Курамото (1.7), в которой динамика каждого осциллятора описывается единственной переменной — фазой θ_i. Эта цепочка упрощений позволяет переносить результаты, полученные для нормальных форм, на физически более детальные модели.

1.1.6. Единый аппарат динамического анализа

Все описанные модели, несмотря на различия в конкретных уравнениях, принадлежат к единому семейству нелинейных динамических систем общего вида (1.13) и описываются общим набором понятий и величин, который используется на протяжении всей диссертации.

Фазовое пространство и аттракторы. Состояние элемента (или сети элементов) задаётся точкой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Долговременное поведение определяется *аттрактором* — притягивающим инвариантным множеством: неподвижной точкой (равновесие), предельным циклом (автоколебания), квазипериодическим тором, хаотическим (странным) аттрактором. Сосуществование нескольких аттракторов (мультистабильность) — типичная ситуация для нелинейных систем и ключевое свойство для задач Глав 3 и 4, где мультистабильность выступает как механизм хранения и переключения между различными режимами функционирования сети.

Бифуркации. Качественные перестройки фазового портрета при изменении параметров — бифуркации — определяют переходы между режимами. В моделях диссертации встречаются: седло-узловая бифуркация — рождение или исчезновение пары неподвижных точек (модель КН); бифуркация Андронова–Хопфа — рождение предельного цикла (ФХН, Стюарта–Ландау, Баутина); граничный кризис — разрушение хаотического аттрактора при столкновении с границей бассейна притяжения (быстрая подсистема КН).

Показатели Ляпунова. Количественная мера чувствительности к начальным условиям. Для N-мерной системы вычисляется полный спектр $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$. Старший показатель $\lambda_1 > 0$ — критерий хаоса. Сумма $\sum_i \lambda_i$ характеризует среднее сжатие или расширение фазового объёма. Для частотных сетей (1.8) со случайной матрицей $\mathbf{W}$ спектр показателей определяется параметром силы связей g [12].

Бассейны притяжения и бассейновая устойчивость. Множество начальных условий, приводящих к данному аттрактору, — бассейн или область притяжения. Его относительный объём — *бассейновая устойчивость* S_B [49] — характеризует робастность режима к возмущениям (глобальная мера робастности режима колебаний) и является одной из основных величин при анализе синхронизации (Глава 2).

Разделение временны́х масштабов. Наличие быстрых и медленных переменных — общее свойство моделей КН (1.1), AdEx (1.3) и ФХН (1.4). Методы анализа (фиксация медленной переменной, бифуркационная диаграмма быстрой подсистемы, построение инвариантных областей) составляют основу раздела 1.2. В частотных моделях (1.8) разделение масштабов может быть индуцировано различием постоянных времени отдельных компонент или вентильными механизмами (GRU, LSTM).

Непритягивающие инвариантные множества и переходная динамика. Помимо аттракторов, фазовое пространство содержит неустойчивые инвариантные множества (седловые точки, неустойчивые циклы, непритягивающие хаотические множества), которые определяют *переходную* динамику — поведение системы до выхода на аттрактор. Переходный хаос — хаотическая динамика конечной длительности вблизи непритягивающего множества — исследуется в разделе 1.3. Характеристикой переходного хаоса служит *вероятность выжи-*

вания хаотической динамики $P(n)$ — доля траекторий из заданного ансамбля начальных условий, которые к моменту времени n ещё не покинули окрестность непритягивающего хаотического множества. Переходная динамика играет важную роль также в задачах резервуарных вычислений (Глава 3), где именно переходные траектории нелинейной сети несут информацию о входном воздействии — в этом контексте конечная сложная динамика выступает как отклик нелинейной системы на сигнал, а считывающий слой извлекает из этого отклика целевую функцию.

Сводка всех моделей приведена в таблице 1.1.

Замечание о двух значениях слова «топология». В диссертации термин «топология» используется в двух различных значениях, которые не следует смешивать. *Топология связей* (или архитектура) сети — граф, определяющий, какие элементы соединены между собой (например, «кольцевая топология», «топология малого мира»); этот термин используется в Главах 1–3 и относится к структуре сети как графа. *Алгебраическая топология* — раздел математики, изучающий инвариантные характеристики пространств и множеств (числа Бетти β_k, диаграммы персистентности); эти методы применяются в Главе 3 (§3.3) для количественного описания формы множества представлений в фазовом пространстве. При каждом использовании контекст позволяет однозначно определить значение; в случае возможной неоднозначности указание даётся явно.

1.1.7. Хаотические режимы динамики активных элементов

Среди перечисленных режимов хаотические колебания занимают особое положение. С одной стороны, они обеспечивают наибольшее разнообразие траекторий: положительный показатель Ляпунова $\lambda_1 > 0$ означает экспоненци-

Таблица 1.1 – Полная сводка моделей активных элементов диссертации: уравнения, характер сигнала, ключевые режимы, размерность фазового пространства одного элемента, тип времени и главы использования. Курсивом выделены модели с физической интерпретацией переменных; прямым шрифтом — абстрактные модели.

Модель	**Ур-ние**	**Сигнал**	**Ключевые режимы**	**Разм.**	**Время**	**Главы**
Модели с физической интерпретацией переменных						
Курбажа–Некоркина	(1.1)	Имп.	Возбудимость, спайк. колеб., хаотич. бёрст. колеб.	2	Дискр.	1, 2
LIF	(1.2)	Имп.	Возбудимость, тонич. спайк. колеб.	1+сброс	Непр.	2, 3, 4
AdEx	(1.3)	Имп.	Адаптация, бёрст. колеб., нерегул. спайк. колеб.	2+сброс	Непр.	2, 3, 4
ФитцХью–Нагумо	(1.4)	Имп./непр.	Возбудимость, автоколебания	2	Непр.	3
Стюарта–Ландау	(1.5)	Непр.	Равновесие, предельный цикл	2	Непр.	2, 3
Баутина	(1.6)	Непр.	Бистабильность равновесие+цикл	2	Непр.	2
Курамото	(1.7)	Фаз.	Синхронизация, десинхронизация	1	Непр.	3
Абстрактные (редуцированные) модели						
Частотная (rate)	(1.8), (1.10)	Непр.	Равновесие, бистабильность; в сети — хаос	1	Непр./дискр.	3, 4
ESN	(1.10)	Непр.	Хаос (резервуар), обучаемый выход	1	Дискр.	3
GRU	(1.11)	Непр.	Управляемая память, мультистабильность	1	Дискр.	3, 4
LSTM	(1.12)	Непр.	Долговременная память, мультистабильность	2	Дискр.	4

альное расхождение близких начальных условий, что создаёт потенциальную возможность различения малых отличий во входных воздействиях — свойство, критически важное для эффективности резервуарных вычислений (Глава 3), где нелинейная сеть с фиксированными связями должна преобразовать входной сигнал в разнообразный набор функций состояния, из которого считывающий слой извлекает целевой отклик. С другой стороны, хаотическая динамика наименее изучена в контексте быстро–медленных систем: ранее практически были не описаны аттракторы, в которых хаос реализуется непосредственно на быстром временном масштабе, и не исследована управляемость переходного хаоса периодическими воздействиями.

Хаотические режимы в той или иной форме присутствуют в нескольких классах моделей из таблицы 1.1:

- В модели КН (1.1) — как хаотические бёрстовые колебания (хаос на быстром масштабе) и как переходный хаос после граничного кризиса.
- В частотных сетях (1.8) — как спонтанный хаос при $g > g_c$ [12], определяющий динамику резервуара.
- В обученных сетях на основе GRU/LSTM — как потенциально хаотическая динамика, выявляемая при анализе спектра показателей Ляпунова после обучения.

Однако *аналитические* результаты — строгое доказательство существования аттрактора, оценка показателей Ляпунова, вывод закона убывания вероятности выживания хаотической динамики — получены только для первого класса: дискретных быстро–медленных систем. Именно этим результатам посвящены два следующих раздела.

В разделе 1.2 рассматриваются *хаотические бёрстовые колебания* — быстро–медленный аттрактор, возникающий при квазистатическом прохождении медленной переменной через область существования хаотического аттрактора быстрой подсистемы. Доказывается существование инвариантной области, даётся оценка старшего показателя Ляпунова $\lambda_1 \approx \kappa \cdot \overline{\lambda}_{\text{fast}}$, и устанавливаются характеристики бёрстовых колебаний как функции параметров.

В разделе 1.3 исследуется *переходный хаос* — нерегулярная динамика конечной длительности, сохраняющаяся после разрушения хаотического аттрактора при граничном кризисе. Показывается, что периодическая модуляция управляющего параметра позволяет целенаправленно управлять временем жизни переходного хаоса, и выводится аналитическое приближение для вероятности выживания хаотической динамики $P(n)$.

1.2. Хаотические бёрстовые колебания в дискретных быстро-медленных системах

Бёрстовые колебания — закономерное чередование пачек (бёрстов) высокочастотных колебаний с интервалами относительного покоя — представляют собой один из наиболее распространённых режимов в нелинейных системах с разделением временны́х масштабов. С точки зрения теории нелинейных колебаний, бёрстовые колебания — это релаксационный процесс, характеризуемый двумя существенно различными временны́ми масштабами [4, 50].

Характерная особенность ранее исследованных релаксационных систем состоит в том, что они содержат участки медленных регулярных движений, чередующиеся с быстрыми переходами между ними. Даже если колебания хаотические, хаос возникает вследствие случайных переключений между медленными регулярными участками [51, 52]. Структура соответствующего аттракто-

ра образована критическими многообразиями, определяемыми равновесиями и предельными циклами быстрой подсистемы при нулевом значении малого параметра.

Настоящий раздел развивает принципиально иной подход: рассматривается отличный от описанных тип быстро-медленных систем, в которых быстрая подсистема обладает не только регулярными аттракторами (равновесиями), но и *хаотическими*. Результирующие колебания содержат два типа участков — медленный регулярный и быстрый хаотический. Медленная переменная выступает в роли квазистатического параметра, проводящего систему через область существования и последующего разрушения хаотического аттрактора быстрой подсистемы. Рассмотрение ведётся в рамках дискретных систем (отображений — динамических систем с дискретным временем) [53], что позволяет реализовать описываемые эффекты в двумерном фазовом пространстве; в системах с непрерывным временем для получения аттракторов с аналогичными свойствами необходимо как минимум четыре измерения.

1.2.1. Класс быстро-медленных отображений

Рассмотрим класс двумерных отображений $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$, вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + P(x_n) - y_n, \\ y_{n+1} = y_n + \varepsilon\, Q(x_n), \end{cases} \qquad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1.14}$$

где ε — малый параметр, определяющий отношение временны́х масштабов. Переменная x является быстрой, а переменная y — медленной. Функция $Q(x) \in C^1$, причём $Q'(x) > 0$. Функция $P(x)$ в общем случае кусочно-непрерывна и

может иметь устранимые разрывы или разрывы первого рода.

Предполагается, что кривые $y = P(x)$ и $Q(x) = 0$ пересекаются в единственной точке $O(x_0, y_0)$, являющейся единственной неподвижной точкой системы (1.14). Схема фазовой плоскости для случаев непрерывной и разрывной функции $P(x)$ показана на рис. 1.1.

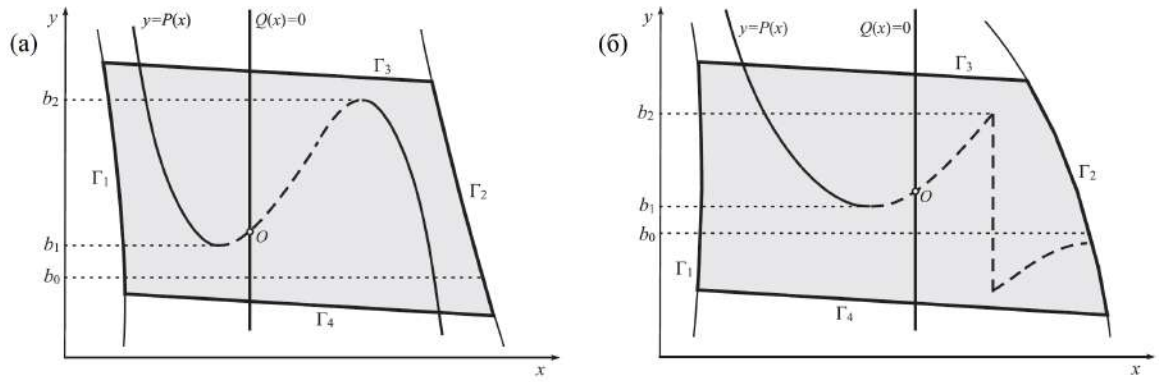

Рис. 1.1 – Изоклины системы (1.14) в фазовой плоскости (x, y): (а) непрерывная функция $P(x)$, (б) разрывная функция $P(x)$. Сплошная линия — изоклина $y = P(x)$ ($\Delta x = 0$); штриховая линия — изоклина $Q(x) = 0$ ($\Delta y = 0$). Точка пересечения $O(x_0, y_0)$ — единственная неподвижная точка системы (1.14).

Пусть $\mathfrak{d}$ — множество точек (x, y), в которых функция $P(x)$ разрывна. Тогда множество разрывов отображения F определяется как $\mathcal{D} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F^{-i}\mathfrak{d}$. В дальнейшем рассматриваются только те траектории отображения F, которые не принадлежат $\mathcal{D}$.

Якобиан отображения (1.14) равен

$$\mathcal{J} = \det \frac{\partial(x_{n+1}, y_{n+1})}{\partial(x_n, y_n)} = 1 + P'(x_n) + \varepsilon\, Q'(x_n). \qquad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что существует $\varepsilon_0 \ll 1$ такое, что для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ якобиан $\mathcal{J} \neq 0$ при значениях x, удовлетворяющих $1 + P'(x) > 0$. Динамика отображения F рассматривается в области фазового пространства $\mathbb{D}$, определяемой этим неравенством. Предполагается также, что в $\mathbb{D}$ функции $P(x)$ и $Q(x)$ ограниче-

ны: $|P(x)| < M_1$, $|Q(x)| < M_2$.

1.2.2. Быстрая и медленная подсистемы

В силу малости ε, стандартный метод анализа быстро-медленных систем состоит в раздельном рассмотрении быстрых и медленных движений.

При $\varepsilon = 0$ из системы (1.14) получается *быстрая подсистема*:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + P(x_n) - y_n, \\ y_{n+1} = y_n, \end{cases} \tag{1.16}$$

эквивалентная одномерному отображению $F_{\text{fast}}\colon x_n \mapsto x_{n+1}$:

$$x_{n+1} = x_n + P(x_n) - y^0, \tag{1.17}$$

где $y^0 = \text{const}$ играет роль параметра.

Медленная подсистема определяется системой

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \varepsilon\, Q(x_n), \\ P(x_n) - y_n = 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

задающей одномерное нелинейное отображение F_{slow}, определённое на кривой $y = P(x)$.

1.2.3. Свойства быстрой подсистемы

На быструю подсистему F_{fast} налагается следующая система условий:

1. Для каждого y^0 отображение F_{fast} обладает *инвариантным интервалом* $\Pi(y^0) = \{x\colon p(y^0) < x < q(y^0)\}$, где $(x, y^0) \in \mathbb{D}$, а функции $p(y^0)$

и $q(y^0)$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченные производные. Все траектории из $\mathbb{D}$ за конечное число итераций попадают в $\Pi(y^0)$ и остаются в нём.

2. Существует вещественное число b_2 такое, что для каждого $y^0 > b_2$ отображение F_{fast} имеет единственную неподвижную точку $x = x_s(y^0)$, асимптотически притягивающую все траектории, причём $p(y^0) < x_s(y^0) < q(y^0)$.

3. Существует вещественное число b_1 ($b_1 < b_2$) такое, что для каждого $y^0 \in (b_1, b_2)$ отображение F_{fast} имеет две неподвижные точки — устойчивую $x = x_s(y^0)$ и неустойчивую $x = x_u(y^0)$ — а также *притягивающий инвариантный интервал* $I(y^0) = \{x\colon a_1(y^0) < x < a_2(y^0)\}$ такой, что $F_{\text{fast}}(I(y^0)) \subset I(y^0)$, где $p(y^0) < a_1(y^0) < a_2(y^0) < q(y^0)$. Неустойчивая неподвижная точка $x_u(y^0)$ разделяет области притяжения устойчивой точки $x_s(y^0)$ и инвариантного интервала $I(y^0)$: траектории с начальными условиями $x < x_u$ притягиваются к x_s, а с $x > x_u$ — к I. Внутри $I(y^0)$ отображение F_{fast} может демонстрировать как регулярную, так и хаотическую динамику.

4. Существует вещественное число b_0 ($b_0 < b_1$) такое, что для каждого $y^0 \in (b_0, b_1)$ инвариантный интервал $I(y^0)$ притягивает все траектории отображения F_{fast} с начальными условиями из $\Pi(y^0)$.

5. Координаты неподвижной точки O полной системы удовлетворяют неравенствам $x_s(b_1) < x_0 < x_u(b_2)$, $b_1 < y_0 < b_2$, что означает неустойчивость точки O.

Содержательный смысл этих условий состоит в следующем. Условие (1)

обеспечивает глобальную ограниченность динамики быстрой подсистемы: для любого значения параметра y^0 все траектории за конечное число итераций попадают в инвариантный интервал $\Pi(y^0)$ и не покидают его, что исключает уход траекторий на бесконечность. Условие (2) определяет область значений параметра y^0, соответствующую состоянию покоя: в быстрой подсистеме существует единственный аттрактор — неподвижная точка. Условие (3) задаёт область бистабильности, в которой сосуществуют устойчивое равновесие и притягивающий инвариантный интервал с возможной хаотической динамикой внутри. Неустойчивая неподвижная точка $x_u(y^0)$ разделяет области притяжения этих двух множеств. Условие (4) определяет область безусловной активности: все траектории притягиваются к инвариантному интервалу. Условие (5) гарантирует, что единственная неподвижная точка O полной системы расположена внутри области бистабильности и является неустойчивой.

1.2.4. Существование инвариантной области и аттрактора

Покажем, что в фазовой плоскости (x, y) существует *инвариантная область* B отображения F (1.14), т. е. такая компактная область, что $F(B) \subset B$ — образ границы ∂B целиком лежит внутри B.

Пусть $C = \partial B$ — граница области B. Будем искать C в виде замкнутого контура с двумя боковыми сторонами C_1, C_2, верхней C_3 и нижней C_4 границами.

Боковые границы. Выберем боковые границы в виде

$$C_1 = \{(x, y) \colon x = p(y),\ (x, y) \in \mathbb{D}\}, \quad C_2 = \{(x, y) \colon x = q(y),\ (x, y) \in \mathbb{D}\}, \tag{1.19}$$

где функции $p(y)$ и $q(y)$ — границы инвариантного интервала быстрой подсистемы при $\varepsilon = 0$ (условие (1)).

Пусть начальная точка $x_0 = p(y_0)$ принадлежит границе C_1. Согласно (1.14), она отображается в точку (x_1, y_1), где

$$x_1 = x_0 + P(x_0) - y_0, \qquad y_1 = y_0 + \varepsilon\, Q(x_0). \tag{1.20}$$

Требуется, чтобы $p(y_1) < x_1 < q(y_1)$, т. е.

$$p(y_1) < x_0 + P(x_0) - y_0 < q(y_1). \tag{1.21}$$

Поскольку $\varepsilon \ll 1$, имеем

$$p(y_1) = p(y_0) + \varepsilon\, Q(x_0)\, p'(y_0) + \dots, \qquad q(y_1) = q(y_0) + \varepsilon\, Q(x_0)\, q'(y_0) + \dots \tag{1.22}$$

Тогда требование (1.21) сводится к выполнению неравенств

$$\varepsilon\, Q(x_0)\, p'(y_0) < L_1, \qquad \varepsilon\, Q(x_0)\, q'(y_0) > L_2, \tag{1.23}$$

где $L_1 = x_0 + P(x_0) - y_0 - p(y_0)$, $L_2 = x_0 + P(x_0) - y_0 - q(y_0)$.

При $\varepsilon = 0$ для каждого $y_0 = \text{const}$ выполняется $p(y_0) < x_0 + P(x_0) - y_0 < q(y_0)$, откуда $L_1 > 0$ и $L_2 < 0$. Поскольку $Q(x)$, $p'(y)$ и $q'(y)$ ограничены в $\mathbb{D}$, всегда найдётся $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ неравенства (1.23) выполняются. Аналогичный результат получается для $x_0 = q(y_0)$. Таким образом, при $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ боковые границы C_1 и C_2 отображаются в область между ними.

Верхняя и нижняя границы. Верхняя и нижняя границы C_3 и C_4 строятся в виде двухзвенных ломаных. Рассмотрим построение C_3 (для C_4 процедура аналогична).

Выберем $y_b > b_2$ и отметим точку $x_b = q(y_b)$ на правой границе C_2. Выберем точку $x_c = s - \delta_0$ ($\delta_0 > 0$) левее изоклины $x = s$, где $Q(s) = 0$, и проведём прямую $y = kx + c$ с наклоном $k > 0$ и параметром $c = y_b + kx_b$. Получим точку (x_c, y_a), где $y_a = kx_c + c > y_b$; проведём горизонталь $y = y_a$ и получим точку (x_a, y_a), где $x_a = p(y_a)$. Таким образом, граница C_3 состоит из двух отрезков: $L_1 : \{y = y_a,\ x_a \leqslant x \leqslant x_c\}$ и $L_2 : \{y = kx + c,\ x_c \leqslant x \leqslant x_b\}$.

Требование $F(L_1) \subset B$ приводит к условию

$$\varepsilon < \inf_{x\in[x_a,x_c]} \frac{x + P(x) - y_a - p(y_a)}{Q(x)\,p'(y_a)}, \tag{1.24}$$

а требование $F(L_2) \subset B$ даёт

$$\varepsilon < \inf_{\substack{x\in[x_c,x_b]\\ y\in[y_b,y_a]}} \frac{x + P(x) - y - p(y)}{Q(x)\,p'(y)}, \qquad \varepsilon < \inf_{\substack{x\in[x_c,x_b]\\ y\in[y_b,y_a]}} \frac{x + P(x) - y - q(y)}{Q(x)\,q'(y)}, \tag{1.25}$$

и дополнительные неравенства на k и c:

$$c < \inf_{x\in[x_a,x_c]} \big[kx + y_a - \varepsilon\,Q(x)\big], \qquad c > \sup_{x\in[x_a,x_c]} \big[kx + P(x) + \varepsilon\,Q(x)/k\big]. \tag{1.26}$$

Неравенства (1.24)–(1.25) определяют значения ε, ниже которых образы $F(L_1)$ и $F(L_2)$ лежат внутри B. Неравенства (1.26) определяют область допустимых значений k и c. Аналогичная процедура даёт нижнюю границу C_4.

При выборе границы C согласно описанной процедуре область B является инвариантной для отображения F (1.14): $F(B) \subset B$. Поскольку внутри B

расположена единственная неустойчивая неподвижная точка O, а все траектории, попавшие в B, остаются в ней при всех последующих итерациях, в B содержится нетривиальный аттрактор $\mathcal{A} \subset B$.

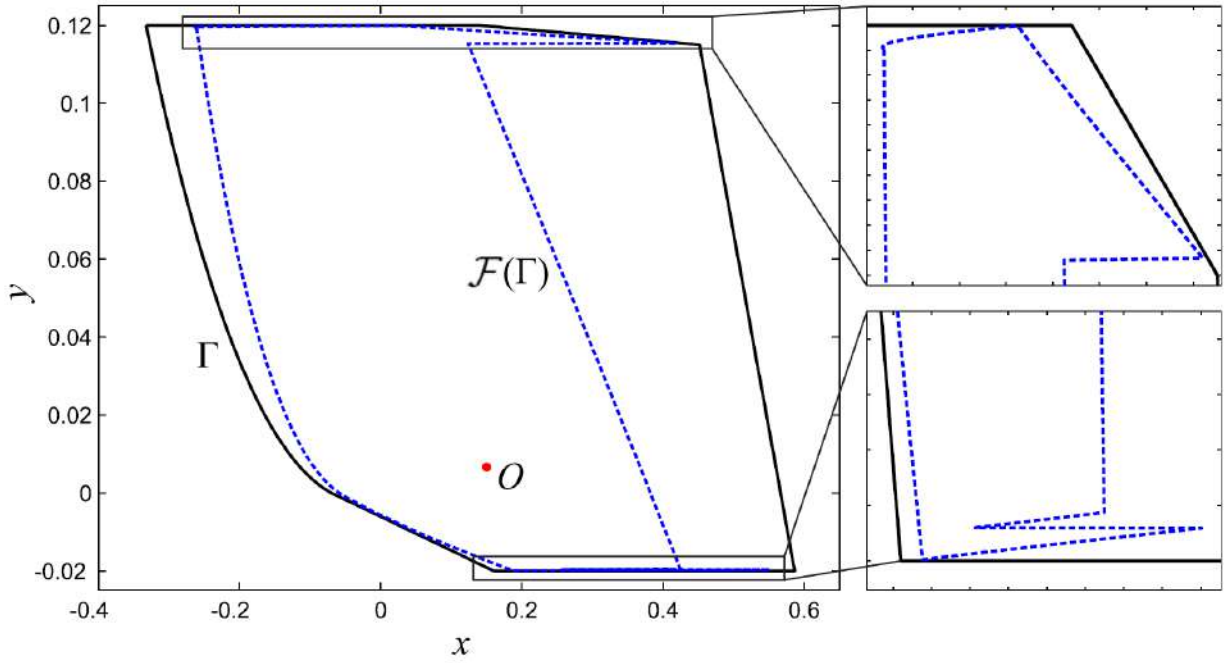

Рис. 1.2 – Построение инвариантной области B для системы (1.14). Сплошная кривая — граница $C = \partial B$; штриховая кривая — её образ $F(C)$ при действии отображения (1.14). Образ границы целиком лежит внутри B, что гарантирует существование аттрактора. Врезки показывают увеличенные фрагменты, подтверждающие, что $F(C) \subset \text{int}(B)$.

1.2.5. Оценка старшего показателя Ляпунова

Хаотический характер аттрактора $\mathcal{A}$ устанавливается посредством вычисления старшего показателя Ляпунова по алгоритму Бенеттина [54].

Пусть начальная точка (x_0, y_0) принадлежит аттрактору $\mathcal{A}$. Эволюция малого возмущения $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (1, 0)$ в линейном приближении описывается вариационной системой

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + P'(x_n)\,\tilde{x}_n - \tilde{y}_n, \\ \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \varepsilon\, Q'(x_n)\,\tilde{x}_n. \end{cases} \tag{1.27}$$

После первой итерации вектор возмущения принимает вид $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = (1 + P_1',\ \varepsilon g_1)$, где $P_1' = P'(x_0)$, $g_1 = Q'(x_0)$. После нормировки с точностью до членов $O(\varepsilon)$ получается $(\tilde{x}_1', \tilde{y}_1') = (1 + P_1',\ \varepsilon h_1)$, где $h_1 = g_1/(1 + P_1')$.

На n-й итерации вектор возмущения отображается в $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (1 + P_n' - \varepsilon h_{n-1},\ \varepsilon g_n)$, где $P_n' = P'(x_{n-1})$, $g_n = h_{n-1} + Q'(x_n)$. После нормировки: $(\tilde{x}_n', \tilde{y}_n') = (1,\ \varepsilon h_n)$, где $h_n = g_n/(1 + P_n' - \varepsilon h_{n-1})$.

Повторяя эту процедуру T раз, по алгоритму Бенеттина получаем

$$\lambda_1 = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{T} \ln(\tilde{x}_n^2 + \tilde{y}_n^2)^{1/2} = \frac{1}{2T}\sum_{n=1}^{T} \ln\bigl[(1 + P_n' - \varepsilon h_{n-1})^2 + (\varepsilon g_n)^2\bigr]. \quad (1.28)$$

С точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ это выражение упрощается:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{T} \ln|1 + P'(x_{n-1})|. \quad (1.29)$$

Вклад различных участков траектории в эту сумму различен. На участке покоя, где траектория находится вблизи устойчивой неподвижной точки $x_s(y^0)$ с $|1 + P'(x_s)| < 1$, соответствующие слагаемые отрицательны и вносят малый вклад. На хаотическом участке, где $|1 + P'(x)| > 1$, вклад положителен.

Показатель Ляпунова хаотического аттрактора одномерного отображения (1.17) при различных значениях y^0 вычисляется как

$$\lambda_0(y^0) = \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{T} \ln|1 + P'(x_n)|. \quad (1.30)$$

Сопоставляя (1.29) и (1.30), получаем оценку

$$\lambda_1 \approx \kappa \cdot \overline{\lambda}_{\text{fast}}, \quad (1.31)$$

где $\overline{\lambda}_{\text{fast}}$ — средний показатель Ляпунова (1.30), усреднённый по интервалу значений y^0, в котором хаотический аттрактор отображения (1.17) существует, а $\kappa \in (0,1)$ — *коэффициент заполнения*, равный отношению средней длительности хаотического участка к среднему периоду релаксационных колебаний.

Смысл оценки (1.31) состоит в том, что результирующая хаотичность полной системы определяется произведением интенсивности хаоса на быстром временном масштабе на относительную долю времени пребывания в хаотическом режиме. Хаотические свойства быстро-медленного аттрактора *наследуются* от хаотического аттрактора быстрой подсистемы.

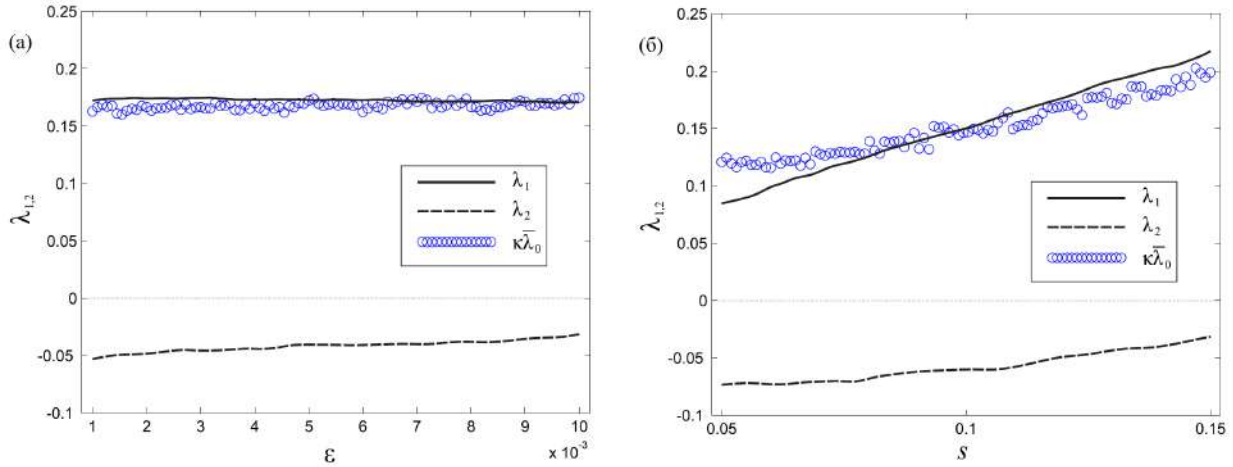

Рис. 1.3 – Верификация оценки (1.31) для модели (1.32). Показатели Ляпунова λ_1 и λ_2 аттрактора полной системы (точки) и оценка $\kappa\,\overline{\lambda}_{\text{fast}}$ (сплошная линия), вычисленная по быстрому отображению (1.34): (а) зависимость от параметра разделения масштабов ε (при $J = 0{,}15$); (б) зависимость от параметра возбудимости J (при $\varepsilon = 10^{-3}$). Положительность λ_1 подтверждает хаотичность аттрактора; хорошее согласие с $\kappa\,\overline{\lambda}_{\text{fast}}$ верифицирует оценку.

1.2.6. Качественное описание движений на аттракторе

Объединяя полученные результаты, можно дать описание движений на аттракторе $\mathcal{A}$, опираясь на свойства быстрой и медленной подсистем.

Из условий (2)–(4) следует, что в зависимости от значения y^0 быстрое отображение (1.17) может иметь: единственную устойчивую неподвижную точ-

ку x_s (при $y^0 > b_2$), единственный притягивающий инвариантный интервал I (при $y^0 < b_1$), либо находиться в состоянии бистабильности — сосуществовании устойчивой точки x_s и интервала I (при $b_1 < y^0 < b_2$).

Первое уравнение системы (1.14) определяет на плоскости (x, y) *кривую медленных движений* — множество неподвижных точек быстрого отображения (1.17) при различных значениях y^0. Эта кривая состоит из двух ветвей: устойчивой W_s, образованной семейством устойчивых неподвижных точек $x_s(y^0)$, и неустойчивой W_u, образованной семейством неустойчивых неподвижных точек $x_u(y^0)$. Согласно условию (5), ветвь W_s целиком лежит в полуплоскости $x < x_0$, и переменная y монотонно убывает на W_s согласно медленной подсистеме (1.18). Из условий (2), (3) и (5) следует, что при всех $y^0 < b_2$ инвариантный интервал $I(y^0)$ лежит в полуплоскости $x > x_0$, и переменная y возрастает в этой области.

При $0 < \varepsilon \ll 1$ динамика системы (1.14) разворачивается следующим образом:

1. *Участок покоя.* Пусть траектория находится в ε-окрестности устойчивой ветви W_s. Эволюция определяется медленными движениями: переменная y медленно и монотонно убывает, и траектория дрейфует вдоль W_s до достижения окрестности точки (x^*, b_1), удовлетворяющей $P(x^*) - b_1 = 0$. В этой точке устойчивая ветвь прекращает существование.

2. *Срыв в активный режим.* При $y < b_1$ единственным притягивающим множеством быстрой подсистемы является инвариантный интервал $I(y)$, и траектория быстро переходит в его окрестность.

3. *Хаотический участок (бёрст).* Для каждого текущего значения y быстрая переменная x остаётся внутри интервала $I(y)$. При тех значениях y,

где $I(y)$ содержит хаотическое множество, траектория совершает быстрые нерегулярные колебания; при других значениях y — регулярные движения, оставаясь внутри $I(y)$. Переменная y при этом монотонно возрастает.

4. *Граничный кризис и возврат в покой.* При достижении $y = b_2$ инвариантный интервал I прекращает существование вследствие граничного кризиса: его левая граница $a_1(y)$ сливается с неустойчивой неподвижной точкой $x_u(y)$. Траектория посредством быстрых движений возвращается на устойчивую ветвь W_s в левой части плоскости (x, y), и описанный цикл начинается заново.

Многократное повторение таких быстро-медленных движений формирует хаотический аттрактор $\mathcal{A}$, содержащий область медленных регулярных движений и область хаотических движений, соединённые быстрыми переходами.

1.2.7. Реализация в дискретной нейронной модели

Описанный общий механизм иллюстрируется на примере конкретной дискретной модели [34—36], являющейся частным случаем системы (1.14):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + F_{\text{cub}}(x_n) - \beta\, H(x_n - d) - y_n + I_n, \\ y_{n+1} = y_n + \varepsilon\,(x_n - J), \end{cases} \tag{1.32}$$

где

$$F_{\text{cub}}(x) = x(x - a)(1 - x) \tag{1.33}$$

— кубическая нелинейность, $H(\cdot)$ — функция Хевисайда, а параметры a, β, d определяют динамический режим. Параметр ε задаёт скорость медленной пере-

менной y, J характеризует возбудимость, I_n — внешнее воздействие (для изолированного элемента $I_n = 0$).

Система (1.32) представляет собой частный случай (1.14) с $P(x) = F_{\text{cub}}(x) - \beta\, H(x-d)$, $Q(x) = x - J$ и единственной неподвижной точкой O с координатами $x_0 = J$, $y_0 = F_{\text{cub}}(J)$.

Модель (1.32) построена на основе дискретизации системы ФитцХью–Нагумо с дополнительно введённой разрывной добавкой $\beta H(x-d)$. В зависимости от значений параметров она воспроизводит широкий набор режимов, наблюдаемых в реальных нейронных генераторах: возбудимые режимы, периодические спайковые колебания, низкоамплитудные подпороговые колебания, хаотические спайково-бёрстовые колебания [34, 35]. Форма генерируемых сигналов контролируется параметром a, а их период определяется ε и J. Разрывная добавка обеспечивает существование хаотических режимов, отсутствующих в гладких двумерных системах типа ФитцХью–Нагумо, а именно — хаотических бёрстовых колебаний. Это свойство обусловлено тем, что быстрая подсистема модели (1.32) при определённых значениях параметров является отображением лоренцевского типа [34, 38].

Быстрая подсистема. При $\varepsilon = 0$ и $y = y^0 = \text{const}$ из (1.32) получается одномерное отображение

$$x_{n+1} = x_n + F_{\text{cub}}(x_n) - \beta\, H(x_n - d) - y^0. \tag{1.34}$$

При $y^0 > F_{\text{cub}}(d)$ отображение (1.34) имеет единственную устойчивую неподвижную точку

$$x_s(y^0) = \frac{1+a}{3} - \frac{2\sqrt{1-a+a^2}}{3}\,\cos\!\Big(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3}\Big), \tag{1.35}$$

где

$$\cos\alpha = \frac{-27}{2(1-a+a^2)^{3/2}}\left[y^0 - \frac{(1+a)(2a^2-5a+2)}{27}\right]. \tag{1.36}$$

При $F_{\text{cub}}(s_{\min}) < y^0 < F_{\text{cub}}(d)$, где $s_{\min} = (1+a-\sqrt{1-a+a^2})/3$, помимо x_s появляется неустойчивая неподвижная точка

$$x_u(y^0) = \frac{1+a}{3} - \frac{2\sqrt{1-a+a^2}}{3}\cos\Big(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\Big). \tag{1.37}$$

В интервале $F_{\text{cub}}(s_{\min}) < y^0 < y_h$ (где y_h определяется из уравнения $d+F_{\text{cub}}(d)-y^0-\beta-x_u(y_h)=0$) помимо двух неподвижных точек существует инвариантный интервал $I(y^0) = \{x\colon a_1(y^0) < x < a_2(y^0)\}$ с границами

$$a_1(y^0) = d + F_{\text{cub}}(d) - y^0 - \beta, \qquad a_2(y^0) = d + F_{\text{cub}}(d) - y^0. \tag{1.38}$$

При $y^0 < F_{\text{cub}}(s_{\min})$ неподвижные точки исчезают и остаётся только интервал $I(y^0)$.

Инвариантная область. Для системы (1.32) при стандартных значениях параметров $a = 0{,}1$, $\beta = 0{,}3$, $d = 0{,}45$, $J = 0{,}15$ инвариантная область B строится с границей $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{x = x_s(y) - \delta_1;\ 0 < y < 0{,}12\},\\
C_2 &= \{x = d + F_{\text{cub}}(d) - y + \delta_2;\ -0{,}02 < y < 0{,}115\},\\
C_3 &= \{y = 0{,}12;\ -0{,}33 < x < 0{,}14\} \cup \{y = \varkappa_1 x + c_1;\ 0{,}14 < x < 0{,}45\},\\
C_4 &= \{y = \varkappa_2 x + c_2;\ -0{,}07 < x < 0{,}16\} \cup \{y = -0{,}02;\ 0{,}16 < x < 0{,}59\},
\end{aligned} \tag{1.39}$$

где $\delta_1 = 0{,}07$, $\delta_2 = 0{,}03$, $\varkappa_1 = 0{,}016$, $c_1 = 0{,}12$, $\varkappa_2 = 0{,}087$, $c_2 = 0{,}006$. Численная верификация подтверждает, что образ $F(C)$ целиком лежит внутри B

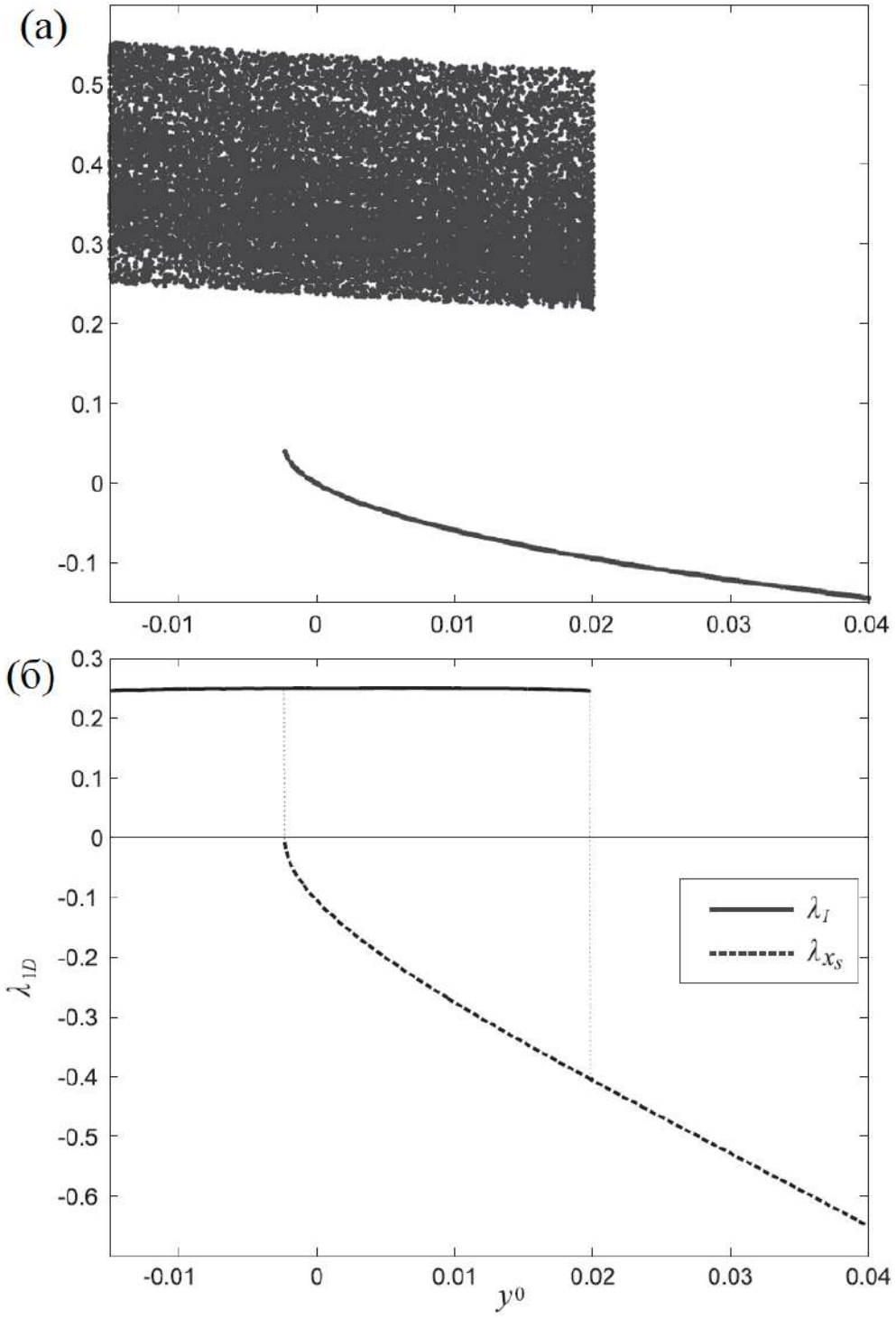

Рис. 1.4 – Бифуркационная диаграмма быстрого отображения (1.34) при изменении параметра y^0. (а) Аттракторы: устойчивая неподвижная точка $x_s(y^0)$ (сплошная линия), неустойчивая неподвижная точка $x_u(y^0)$ (штриховая), множество внутри инвариантного интервала $I(y^0)$ (точки). (б, в) Показатели Ляпунова $\lambda_I(y^0)$ для множества внутри I и $\lambda_s(y^0)$ для неподвижной точки x_s. В интервале $-0{,}015 < y^0 \leqslant 0{,}02$ показатель λ_I принимает только положительные значения — внутри I существует хаотический аттрактор. При $y^0 = y_h \approx 0{,}02$ происходит граничный кризис: левая граница $a_1(y_h)$ сливается с неустойчивой точкой $x_u(y_h)$.

(рис. 1.2).

Хаотический аттрактор. Аттрактор системы (1.32) и соответствующая временна́я реализация $x(n)$ показаны на рис. 1.5. Чётко различаются два участка: участок покоя, где x медленно изменяется (левая часть аттрактора, нижние участки $x(n)$), и активный участок с быстрыми нерегулярными колебаниями большой амплитуды (правая часть аттрактора, верхние участки $x(n)$), соединённые быстрыми переходами.

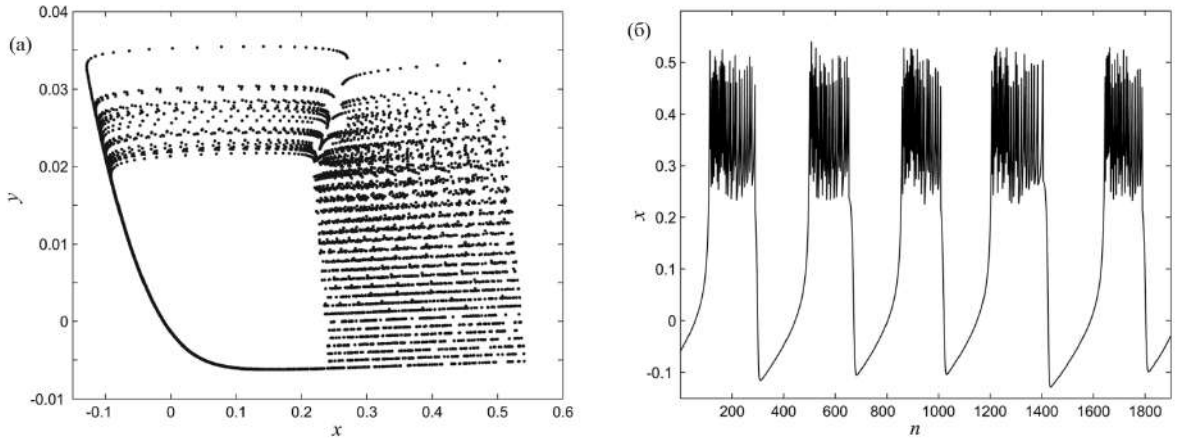

Рис. 1.5 – Хаотические бёрстовые колебания в модели (1.32) при $a = 0{,}1$, $\beta = 0{,}3$, $d = 0{,}45$, $\varepsilon = 0{,}001$, $J = 0{,}1$, $I = 0$. (а) Хаотический аттрактор на фазовой плоскости (x, y): чередование медленного движения вдоль ветви покоя (левая часть) и быстрых хаотических колебаний (правая часть). (б) Временна́я реализация переменной $x(n)$, демонстрирующая характерную бёрстовую структуру: пачки хаотических спайков, разделённые интервалами покоя.

Сопоставление численно рассчитанных показателей Ляпунова $\lambda_{1,2}$ аттрактора полной системы (1.32) с оценкой $\kappa\,\overline{\lambda}_{\text{fast}}$ по быстрому отображению (1.34) представлено на рис. 1.3. Положительность λ_1 подтверждает хаотичность аттрактора. Оценка (1.31) находится в хорошем количественном согласии с прямым численным расчётом во всём исследованном диапазоне параметров ε и J.

1.2.8. Зависимость характеристик бёрстовых колебаний от параметров

Для дальнейшего использования модели (1.32) в качестве элемента сетей (Глава 2) необходимо установить, как основные характеристики бёрстовых колебаний зависят от параметров ε и J. К таким характеристикам относятся:

- *средний период* T колебаний — интервал между начальными моментами последовательных пачек;
- *средняя длительность активного участка* T_{act} — время пребывания траектории в области быстрых колебаний ($x > J_{\text{min}}$);
- *среднее число спайков в пачке* N_{spb} — количество пересечений порога $x = J_{\text{min}}$ снизу вверх за одну пачку.

Результаты численного исследования этих величин, представленные на рис. 1.6, состоят в следующем.

1. С ростом ε (при фиксированном J) средний период T монотонно убывает — ускорение медленной переменной сокращает длительность обоих участков; T_{act} убывает; N_{spb} убывает.
2. С ростом J (при фиксированном ε) средний период T монотонно возрастает; T_{act} возрастает; N_{spb} возрастает.
3. Все три зависимости являются *гладкими* (без резких скачков или разрывов), что свидетельствует о структурной устойчивости хаотического аттрактора по отношению к вариации параметров ε и J. Это обстоятельство существенно для сетевых приложений: малые различия в параметрах элементов не приводят к качественным изменениям их динамики.

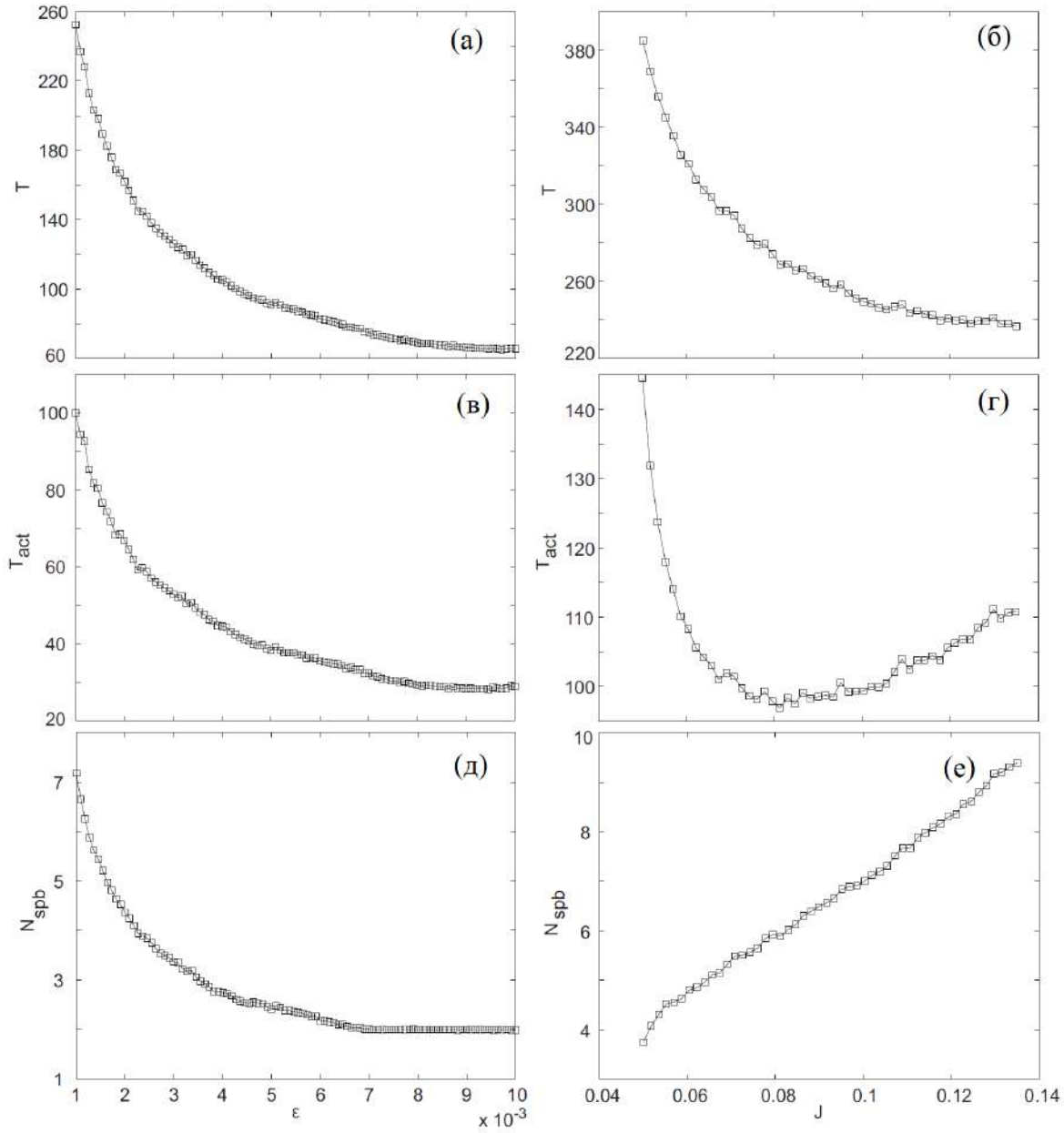

Рис. 1.6 – Характеристики хаотических бёрстовых колебаний одиночного элемента (1.32): (а, б) средний период T, (в, г) средняя длительность активного участка T_{act}, (д, е) среднее число спайков в бёрсте N_{spb}. Левый столбец — зависимость от ε (при $J = 0{,}1$); правый столбец — зависимость от J (при $\varepsilon = 10^{-3}$). Гладкость зависимостей свидетельствует о структурной устойчивости хаотического аттрактора по отношению к вариации параметров.

Указанные характеристики играют ключевую роль при исследовании бёрстовой синхронизации в Главе 2. В частности, число спайков в пачке N_{spb} определяет, при каких значениях ε и J бассейновая устойчивость синхронного режима принимает высокие или низкие значения — этот эффект детально исследуется в разделе 2.1.

1.3. Управление переходным хаосом посредством периодического воздействия

В предыдущем разделе граничный кризис хаотического аттрактора рассмотрен как механизм детерминированного переключения между фазами бёрстовой динамики: при выходе медленной переменной за критическое значение b_2 хаотический аттрактор быстрой подсистемы разрушается, и траектория покидает область хаотической динамики. Однако *непосредственно после кризиса* в фазовом пространстве сохраняется *непритягивающее хаотическое множество*, на котором траектории демонстрируют нерегулярное поведение конечной длительности [55, 56].

Переходный хаос — динамический феномен, при котором система проявляет нерегулярное поведение в течение конечного, но потенциально длительного времени, после чего выходит к устойчивому состоянию [55, 56]. В отличие от *аттракторного хаоса*, при котором нерегулярная динамика сохраняется неограниченно долго на притягивающем множестве, переходный хаос разворачивается на *непритягивающем* хаотическом множестве: траектории проводят на нём конечное время, после чего покидают его окрестность. Переходный хаос играет существенную роль в лазерной динамике [57, 58], климатических процессах [59, 60], экологических моделях [61, 62], задачах устойчивости энергетических сетей [63], химических реакциях [64] и биологических системах [65—

67]. В зависимости от приложения, может требоваться как продление, так и сокращение переходного хаоса: например, исчезновение хаотической динамики в нейронных системах может быть следствием патологических процессов [66], тогда как в экологии для достижения устойчивого размера популяции необходимо предотвратить затянувшийся переходный хаос [61].

Настоящий раздел посвящён вопросу: *можно ли управлять длительностью переходного хаоса периодическим внешним воздействием?*.

1.3.1. Отображение лоренцевского типа и граничный кризис

Рассматривается одномерное отображение лоренцевского типа [38, 68]:

$$x_{n+1} = x_n + F_H(x_n) - \gamma, \tag{1.40}$$

где нелинейная функция

$$F_H(x) = x(x-a)(1-x) - \beta\, H(x-d) \tag{1.41}$$

содержит кубическую нелинейность с разрывом при $x = d$, контролируемым функцией Хевисайда $H(\cdot)$. При стандартных значениях параметров $a = 0{,}1$, $\beta = 0{,}3$, $d = 0{,}45$ отображение (1.40) совпадает с быстрой подсистемой (1.34) модели Курбажа–Некоркина при отождествлении $\gamma \equiv y^0$.

Бифуркационная диаграмма. Область интереса — $\mathcal{S} = \{0{,}2 < x < 0{,}6;\ 0{,}01 < \gamma < 0{,}03\}$. При $\gamma < \gamma_{cr} \approx 0{,}0198$ отображение (1.40) обладает двумя аттракторами: устойчивой неподвижной точкой $O_s = x_s^*(\gamma)$ и хаотическим аттрактором

$\Xi(\gamma)$, расположенным в инвариантной области

$$\mathcal{J}(\gamma) = \{x\colon b(\gamma) < x < c(\gamma)\}, \tag{1.42}$$

где

$$b(\gamma) = 0{,}236625 - \gamma, \qquad c(\gamma) = 0{,}536625 - \gamma. \tag{1.43}$$

Бассейны притяжения устойчивой точки O_s и хаотического аттрактора Ξ разделены неустойчивой неподвижной точкой $O_u = x_u^*(\gamma)$, причём выполняется неравенство $x_u^*(\gamma) < x_s^*(\gamma) < b(\gamma) < c(\gamma)$.

Координаты неподвижных точек определяются явными формулами:

$$x_{s,u}^*(\gamma) = \frac{1+a}{3} - \frac{2\sqrt{1-a+a^2}}{3}\cos\Big(\frac{\varphi}{3} \mp \frac{\pi}{3}\Big), \tag{1.44}$$

где

$$\cos\varphi = \frac{-27}{2(1-a+a^2)^{3/2}}\left[\gamma - \frac{(1+a)(2a^2-5a+2)}{27}\right]. \tag{1.45}$$

(Здесь знак «$-$» соответствует x_s^*, знак «$+$» — x_u^*.)

При $\gamma = \gamma_{cr}$ происходит *граничный кризис*: хаотический аттрактор Ξ разрушается. При $\gamma > \gamma_{cr}$ единственным аттрактором остаётся устойчивая точка O_s; аттракторный хаос в системе отсутствует. Однако в фазовом пространстве сохраняется *непритягивающее хаотическое множество* $N(\gamma)$ — «скелет» разрушенного аттрактора, состоящий из неустойчивых периодических орбит и их многообразий. Траектории, стартующие вблизи $N(\gamma)$, демонстрируют хаотическое поведение конечной длительности τ (*время жизни* переходного хаоса), после чего покидают окрестность N и притягиваются к O_s. Две траектории, стартующие из близких точек, могут иметь времена жизни хаоса, различающиеся на порядки величины.

1.3.2. Периодическая модуляция управляющего параметра

Введём периодическое воздействие:

$$x_{n+1} = x_n + F_H(x_n) - \gamma_n, \qquad \gamma_n = \gamma_0 + A\sin(\omega n), \tag{1.46}$$

где $\gamma_0 = \gamma_{cr} + \delta$ — «центральное» значение параметра, $\delta > 0$ — средняя отстройка от кризиса, A — амплитуда, ω — частота модуляции. При $A \leqslant \delta$ параметр γ_n не опускается ниже γ_{cr}, так что траектории не попадают в область аттракторного хаоса $\gamma < \gamma_{cr}$ и наблюдаемая динамика является исключительно переходной.

Пример влияния периодической модуляции показан на рис. 1.7: при одних и тех же начальных условиях $(x_0, \gamma_0) = (0{,}25;\ 0{,}001)$ в статическом случае наблюдается хаотическое поведение длительностью $\tau \approx 250$, тогда как при включении модуляции с $A = 0{,}001$, $\omega = 1$ время жизни хаоса возрастает до $\tau > 1000$.

Критерий выхода из хаотической области. В статическом случае нижняя граница хаотического движения определяется неустойчивой точкой $O_u = x_u^*(\gamma)$. В динамическом случае из-за непрерывного осциллирования γ_n некоторые траектории могут выходить за статическую границу и затем возвращаться в хаотическую область. Поэтому критерий выхода формулируется через границу инвариантной области: траектория считается покинувшей хаотическую область, если $x_{\tau+1} < b(\gamma_{\tau+1})$.

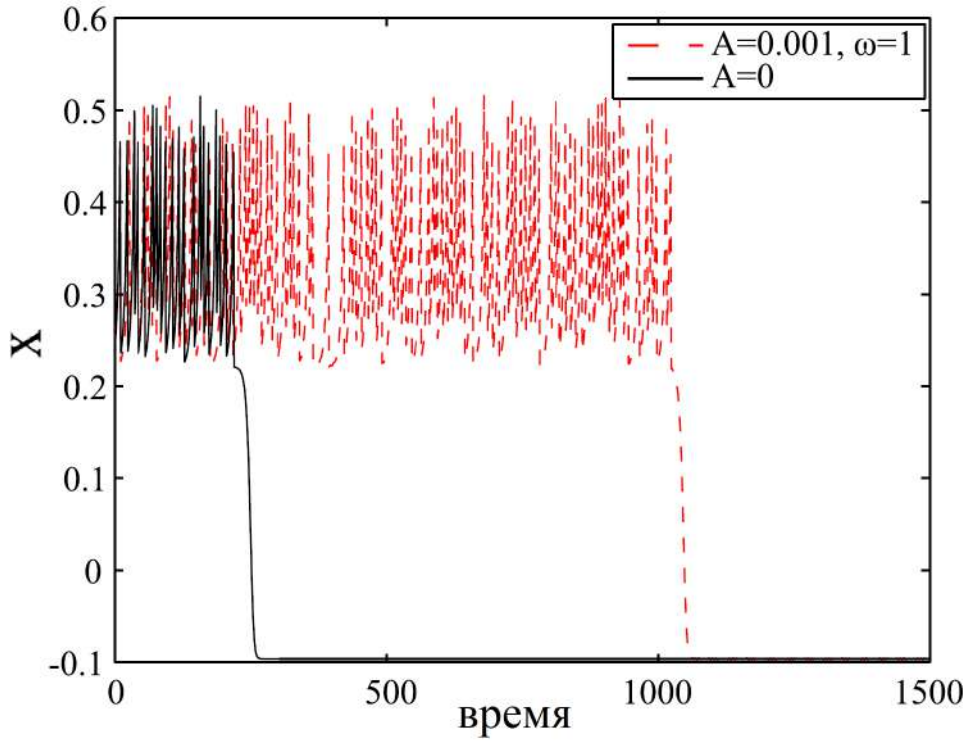

Рис. 1.7 – Динамика переменной $x(n)$ отображения (1.40) при $x_0 = 0{,}25$, $\gamma = \gamma_{cr} + 0{,}001$. (а) Статический случай (сплошная линия): траектория покидает хаотическую область при $\tau \approx 250$. (б) Динамический случай (1.46) при тех же начальных условиях с $A = 0{,}001$, $\omega = 1$ (штриховая линия): время жизни переходного хаоса возрастает более чем в 4 раза ($\tau > 1000$).

1.3.3. Распределение времён жизни хаоса

Для анализа статистики времён жизни хаоса используется ансамбль из $N_0 = 10^5$ точек, равномерно распределённых в интервале $b(\gamma_0) < x_0 < c(\gamma_0)$, где $\gamma_0 = \gamma_{cr} + \delta$ (в численных экспериментах $\delta = 0{,}001$). Каждая траектория эволюционирует согласно (1.46) до момента выхода из хаотической области, что определяет соответствующее время жизни хаоса τ.

Распределения τ для различных частот модуляции показаны на рис. 1.8. Все распределения убывают в среднем, однако их характер существенно зависит от частоты. При наименьших частотах $\omega = 0{,}001$ и $\omega = 0{,}01$ распределения обладают протяжёнными хвостами: заметная доля траекторий имеет времена жизни хаоса $\tau \sim 500$–1000, значительно превышающие средние. При $\omega = 0{,}01$ наблюдается дополнительный пик при $\tau \approx 600$, отсутствующий при других частотах, — он связан со временем, за которое параметр γ_n совершает один полный цикл. При $\omega = 0{,}1$ распределение оказывается менее гладким, приобретая прерывистый характер. При наибольшей частоте $\omega = 1$ распределение наиболее компактно и ближе всего к экспоненциальной форме, характерной для статического переходного хаоса.

1.3.4. Вероятность выживания хаотической динамики

Количественной характеристикой переходного хаоса служит *вероятность выживания* хаотической динамики — доля траекторий, остающихся в хаотической области к моменту n:

$$P(n) = \frac{N(n)}{N_0}, \tag{1.47}$$

где $N(n)$ — число траекторий из исходного ансамбля N_0, не покинувших хаотическую область к моменту n. Термин «выживание» отражает аналогию с задача-

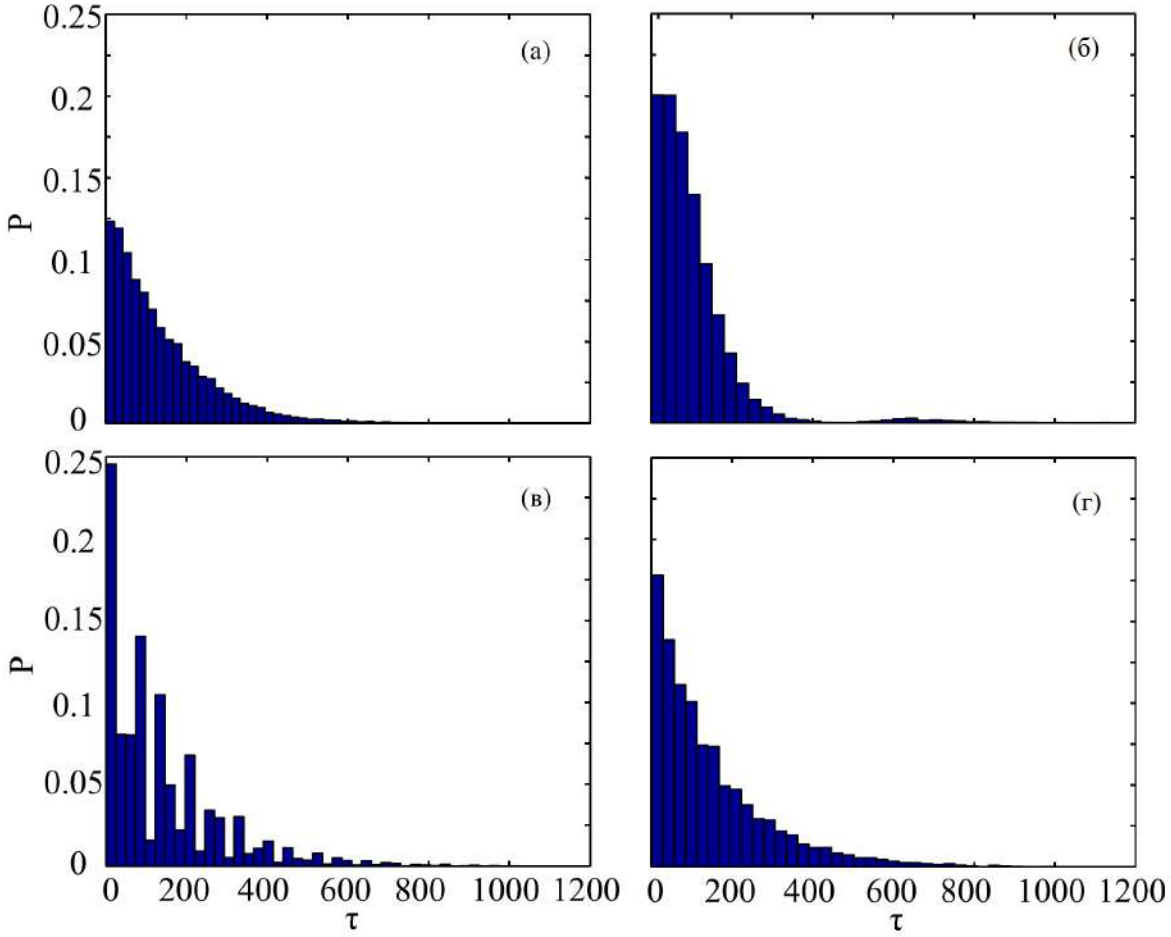

Рис. 1.8 – Распределения времён жизни переходного хаоса для системы (1.46) при $A = 0{,}001$, $\delta = 0{,}001$ и различных частотах модуляции: (а) $\omega = 0{,}001$; (б) $\omega = 0{,}01$; (в) $\omega = 0{,}1$; (г) $\omega = 1$. При малых частотах наблюдаются протяжённые хвосты с траекториями, имеющими $\tau \sim 500$–1000. При $\omega = 0{,}01$ присутствует дополнительный пик при $\tau \approx 600$, связанный с периодом модуляции.

ми теории надёжности: траектория «выживает», пока остаётся на непритягивающем хаотическом множестве. Для типичного переходного хаоса в статическом случае закон убывания $P(n)$ экспоненциален: $P(n) = e^{-\kappa n}$, где κ — *скорость выхода*, характеризующая темп покидания хаотической области [55].

Для системы с периодическим воздействием (1.46) закон убывания $P(n)$ существенно зависит от частоты модуляции (рис. 1.9). При минимальной частоте $\omega = 0{,}001$ наблюдается приближённо экспоненциальное поведение с плавно нарастающим наклоном — это объясняется тем, что при столь медленной модуляции траектории последовательно проходят через непритягивающие множества $N(\gamma)$ с различными γ (и, следовательно, различными κ), причём бóльшая часть ансамбля покидает хаотическую область прежде, чем γ_n начнёт убывать.

При бóльшей частоте $\omega = 0{,}01$ вероятность выживания хаотической динамики сначала убывает быстрее (более быстрое движение к области $\gamma > \gamma_0$), затем замедляется после разворота γ_n, когда траектории проходят через слои с меньшими скоростями выхода, и вновь ускоряется при следующем нарастании γ_n. Аналогичная осциллирующая динамика $P(n)$ наблюдается при $\omega = 0{,}1$, однако здесь большинство траекторий успевают совершить много осцилляций вокруг $\gamma = \gamma_0$ прежде, чем покинуть хаотическую область.

Высокочастотная модуляция при $\omega = 1$ приводит к экспоненциальному убыванию $P(n)$, аналогичному статическому случаю, поскольку траектории многократно посещают γ-слои по обе стороны от центральной точки $\gamma = \gamma_0$, что обеспечивает гладкое усреднение скоростей выхода $\kappa(\gamma)$. Для бóльших ω вплоть до естественного верхнего предела $\omega_{\max} = \pi$ (вырожденный случай переключения между двумя значениями γ с периодом 2) ситуация аналогична.

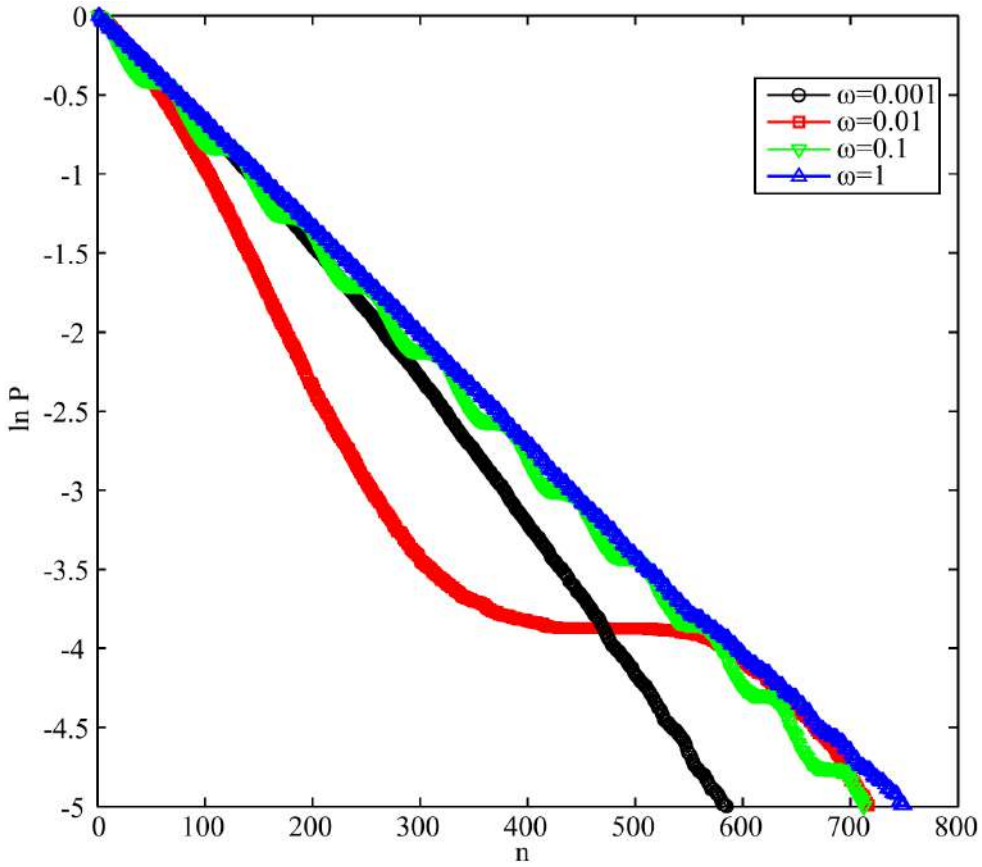

Рис. 1.9 – Вероятность выживания хаотической динамики $\ln P(n)$ для системы (1.46) при $A = 0{,}001$, $\delta = 0{,}001$ и четырёх частотах модуляции: (а) $\omega = 0{,}001$; (б) $\omega = 0{,}01$; (в) $\omega = 0{,}1$; (г) $\omega = 1$. При $\omega = 0{,}001$ и $\omega = 1$ убывание близко к экспоненциальному (прямые на графике); при промежуточных частотах выражены осцилляции, отражающие периодическую модуляцию мгновенной скорости выхода.

1.3.5. Аналитическое приближение для вероятности выживания хаотической динамики

Аналитический вывод закона убывания $P(n)$ основан на свойствах выхода из статических непритягивающих множеств $N(\gamma)$, образующих «скелет» хаотического множества, формируемого динамикой (1.46). Согласно [69], скорость выхода в статическом случае при $\gamma > \gamma_{cr}$ линейно зависит от γ:

$$\kappa(\gamma) = \alpha\,(\gamma - \gamma_{cr}), \qquad \alpha \approx 7{,}48. \tag{1.48}$$

Ключевая идея состоит в приближении адиабатического следования: на каждом шаге k вероятность покидания хаотической области определяется мгновенным значением $\kappa(\gamma_k)$, как если бы система находилась в статическом непритягивающем множестве $N(\gamma_k)$. С учётом экспоненциальной формы вероятности выживания хаотической динамики для каждого статического слоя запишем:

$$P(n) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \kappa_k\right). \tag{1.49}$$

Подставляя $\gamma_k = \gamma_{cr} + \delta + A\sin(\omega k)$, получаем

$$P(n) = \exp\left(-\alpha \sum_{k=0}^{n} [\delta + A\sin(\omega k)]\right). \tag{1.50}$$

Вычисляя тригонометрическую сумму

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(\omega k) = \frac{\sin(\omega(n+1)/2)\,\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} \approx \frac{1-\cos(\omega n)}{\omega} \quad (\omega \ll 1), \tag{1.51}$$

приходим к аналитическому выражению для вероятности выживания хаотиче-

ской динамики при периодической модуляции:

$$P(n) \approx \exp\left(-\alpha\left[\delta\, n + \frac{A}{\omega}(1-\cos(\omega n))\right]\right). \tag{1.52}$$

Формула (1.52) явно разделяет два вклада в темп покидания хаотической области: *монотонный* ($\alpha\delta n$), определяемый средней отстройкой от кризиса, и *осциллирующий* ($\frac{\alpha A}{\omega}(1-\cos\omega n)$), определяемый параметрами модуляции. Соотношение этих вкладов управляет качественным характером убывания $P(n)$.

Предельные случаи.

- *Низкая частота* ($\omega \to 0$): $P(n) \approx \exp(-\alpha\delta\, n)$ — экспоненциальное убывание со скоростью, определяемой средней отстройкой δ, что согласуется с приближённо экспоненциальной формой на рис. 1.9 для $\omega = 0{,}001$.

- *Высокая частота* ($\omega \to \pi$): $P(n) \approx \exp\bigl(-\alpha[\delta n + A/\omega]\bigr)$ — экспоненциальное убывание с увеличенной эффективной скоростью выхода.

- *Промежуточные частоты* ($\omega \sim 0{,}01$–$0{,}1$): осциллирующая поправка $\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega n)$ приводит к *немонотонному* убыванию $\ln P(n)$ с чередованием фаз ускоренного и замедленного выхода.

Формулы (1.50)–(1.52) находятся в хорошем согласии с численными результатами рис. 1.9, однако наилучшее согласие наблюдается, пока бóльшая часть траекторий ещё находится в хаотической области.

Сравнение с монотонно нарастающим параметром. Полученные результаты принципиально отличаются от случая линейно нарастающего параметра $\gamma_n = \gamma_0 + \varepsilon n$ [69]. В том случае вероятность выживания хаотической динамики убывает неэкспоненциально: $P(n) = \exp(-\alpha\varepsilon n^2/2)$, что существенно медленнее в

начале процесса, но ускоряется по мере роста n. При периодическом же воздействии средняя скорость выхода остаётся постоянной (рис. 1.9). Следовательно, в зависимости от соотношения между скоростью нарастания ε и параметрами модуляции (A, ω, δ), выход из хаотической области при периодическом воздействии может завершиться *раньше или позже*, чем при монотонно нарастающем параметре.

Определим момент завершения процесса как n_f, при котором менее 1 % траекторий остаётся в хаотической области: $\ln P(n_f) = -5$. Момент $n^* = 2\delta/\varepsilon$, когда вероятности выживания хаотической динамики для обоих случаев сравниваются, должен удовлетворять $n^* < n_f$ для того, чтобы при монотонном параметре выход завершался раньше. Это условие даёт: при $\varepsilon > 3 \times 10^{-6}$ бóльшая часть траекторий покидает хаотическую область раньше в случае монотонного нарастания параметра.

1.3.6. Скорость выхода: зависимость от амплитуды и отстройки

Хотя при промежуточных частотах вероятность выживания хаотической динамики убывает неэкспоненциально, процесс выхода из хаотической области можно характеризовать *обобщённой скоростью выхода* κ, определяемой как наклон линейного тренда $\ln P(n)$. Скорость выхода вычисляется по первым 500 итерациям при начальных условиях $\gamma = \gamma_0$, x_0 равномерно в $[b(\gamma_0), c(\gamma_0)]$.

Зависимость от амплитуды. На рис. 1.10 (а) показана $\kappa(A)$ для различных частот. Все кривые стартуют из значения $\kappa \approx 6{,}5 \times 10^{-3}$ при $A = 0$, соответствующего скорости выхода в статическом случае при $\gamma = \gamma_0$.

Для малых частот $\omega = 0{,}001$ и $\omega = 0{,}01$ скорость выхода растёт приблизительно линейно с ростом A — при бóльших амплитудах траектории посещают

области $\gamma > \gamma_0$, где скорость выхода выше (чем дальше от γ_{cr}, тем больше κ). Кривая для $\omega = 0{,}01$ лежит выше кривой для $\omega = 0{,}001$, что согласуется с более быстрым начальным убыванием $P(n)$ на рис. 1.9.

При $\omega = 0{,}1$ скорость выхода почти не меняется для $A < 0{,}001$ и начинает медленно расти при $A > 0{,}001$. При $\omega = 1$ величина $\kappa(A)$ в среднем постоянна в исследуемой области. Примечательно, что хотя при $A > \delta$ (т. е. $A > 0{,}001$ при $\delta = 0{,}001$) траектории часть времени проводят в области аттракторного хаоса $\gamma < \gamma_{cr}$, скорость выхода не уменьшается: чем глубже траектория проникает в область $\gamma < \gamma_{cr}$, тем глубже она затем оказывается в области $\gamma > \gamma_{cr}$ с бóльшими скоростями выхода.

Зависимость от отстройки. С увеличением δ (углублением в закритическую область $\gamma > \gamma_{cr}$) скорость выхода возрастает для всех частот и амплитуд, поскольку при бóльших δ траектории проходят через статические слои $N(\gamma)$ с бóльшими скоростями выхода (рис. 1.10 (б)).

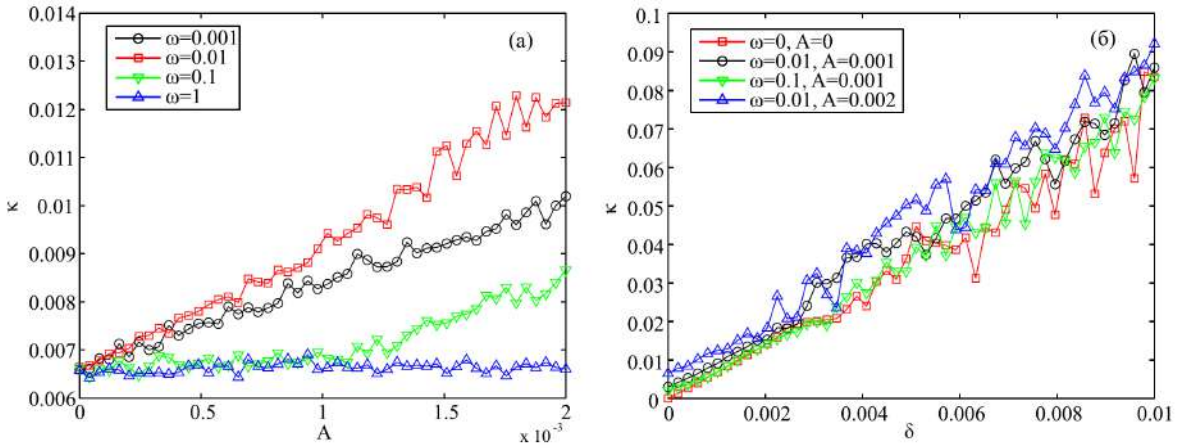

Рис. 1.10 – Обобщённая скорость выхода κ для системы (1.46). (а) Зависимость от амплитуды A при $\delta = 0{,}001$ и различных частотах $\omega = 0{,}001;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1$. (б) Зависимость от отстройки δ при различных частотах и амплитудах (показан также статический случай $\omega = 0$, $A = 0$). Все кривые стартуют при $A = 0$ из значения $\kappa \approx 6{,}5 \times 10^{-3}$, соответствующего статической скорости выхода при $\gamma = \gamma_0$.

1.3.7. Структура непритягивающего множества

Для понимания динамических механизмов, стоящих за описанной статистикой выхода, исследуется структура множества переходного хаоса, формируемого динамикой (1.46), в пространстве состояний (x, γ). Поскольку параметр γ_n периодически изменяется во времени, пара (x_n, γ_n) определяет мгновенное состояние системы и задаёт естественное пространство для визуализации динамики неавтономного отображения.

Начальный ансамбль из $N_0 = 10^5$ точек, равномерно распределённых в интервале $b(\gamma_0) < x_0 < c(\gamma_0)$, эволюционирует при осциллирующем γ_n. Отбираются траектории с максимальными временами жизни хаоса — именно они приближают инвариантную структуру непритягивающего хаотического множества.

Результат для $\omega = 1$, $A = 0{,}001$, $\gamma_0 = \gamma_{cr} + 0{,}001$ показан на рис. 1.11. Левая вертикальная линия обозначает критическое значение $\gamma = \gamma_{cr}$, правая — центральную точку $\gamma = \gamma_0$. Отчётливо видны несколько *щелей*, через которые траектории покидают хаотическое множество. Наиболее широкая щель расположена вблизи $x = 0{,}45$ (точка разрыва нелинейности F_H): попав в эту щель, траектория на следующем шаге покидает хаотическую область. Более узкие щели ниже являются *прообразами* основной щели: чем ниже и у́же щель, тем выше порядок прообраза. Иерархическая организация щелей определяет статистику времён жизни хаоса: траектория, попавшая в щель k-го порядка, покидает хаотическую область за k шагов.

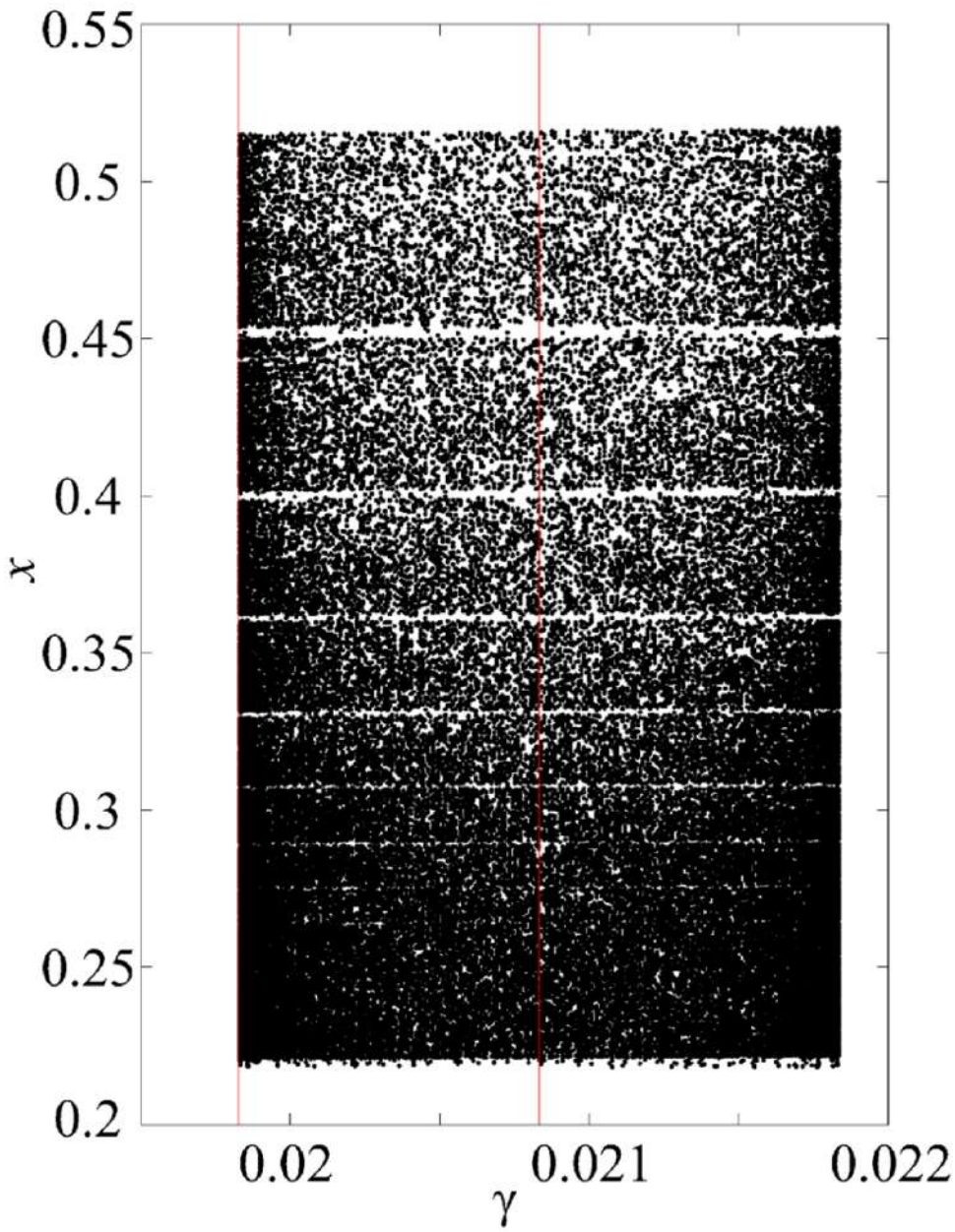

Рис. 1.11 – Структура множества переходного хаоса в пространстве состояний (x, γ), формируемого динамикой (1.46) при $A = 0{,}001$, $\delta = 0{,}001$, $\omega = 1$. Показаны траектории с максимальными временами жизни хаоса, приближающие инвариантную структуру непритягивающего множества. Левая вертикальная линия — $\gamma = \gamma_{cr}$ (граничный кризис); правая — $\gamma = \gamma_0$ (центральная точка модуляции). Широкая щель вблизи $x = 0{,}45$ — основная область выхода; более узкие щели ниже — её прообразы последовательно возрастающего порядка.

1.3.8. Карта «времён жизни» хаоса

Время жизни хаоса τ конкретной траектории зависит от начального условия x_0 и параметров модуляции (A, ω). На плоскости (A, ω) при фиксированном начальном условии $(x_0, \gamma_0) = (0{,}25;\ \gamma_{cr} + 0{,}001)$ возникает мозаичная карта $\tau(A, \omega)$ со сложной мелкомасштабной структурой (рис. 1.12).

Характерные элементы карты:

- *Компактные области минимальных времён жизни хаоса* (тёмно-синие области на карте) — чётко выраженные пары (A, ω), при которых траектория быстро попадает в одну из щелей выхода (рис. 1.11) и покидает хаотическую область за $\tau \ll \bar{\tau}$. Эти области являются наиболее отчётливым элементом карты.

- *Обширные области с повышенными в среднем временами жизни хаоса*, существенно превышающими время жизни в статическом случае ($\tau_{\text{stat}} \approx 250$ при тех же начальных условиях). Внутри этих областей точки с различными временами жизни тесно перемежаются, образуя мелкомасштабную мозаику, — выбрать параметры (A, ω), точно попадающие на траекторию с заданным τ, практически невозможно. Тем не менее *в среднем* эти области обеспечивают существенное продление переходного хаоса по сравнению со статическим случаем.

- *Фрактальные границы* между областями различного поведения, отражающие чувствительность динамики на непритягивающем множестве к параметрам воздействия.

Аналогичные диаграммы возникают для траекторий с другими начальными условиями. Таким образом, варьированием параметров модуляции (A, ω)

можно целенаправленно управлять временем жизни переходного хаоса — как *сокращать* его (попадая в компактные области минимальных τ), так и *продлевать* (выбирая параметры из областей с повышенными средними временами жизни).

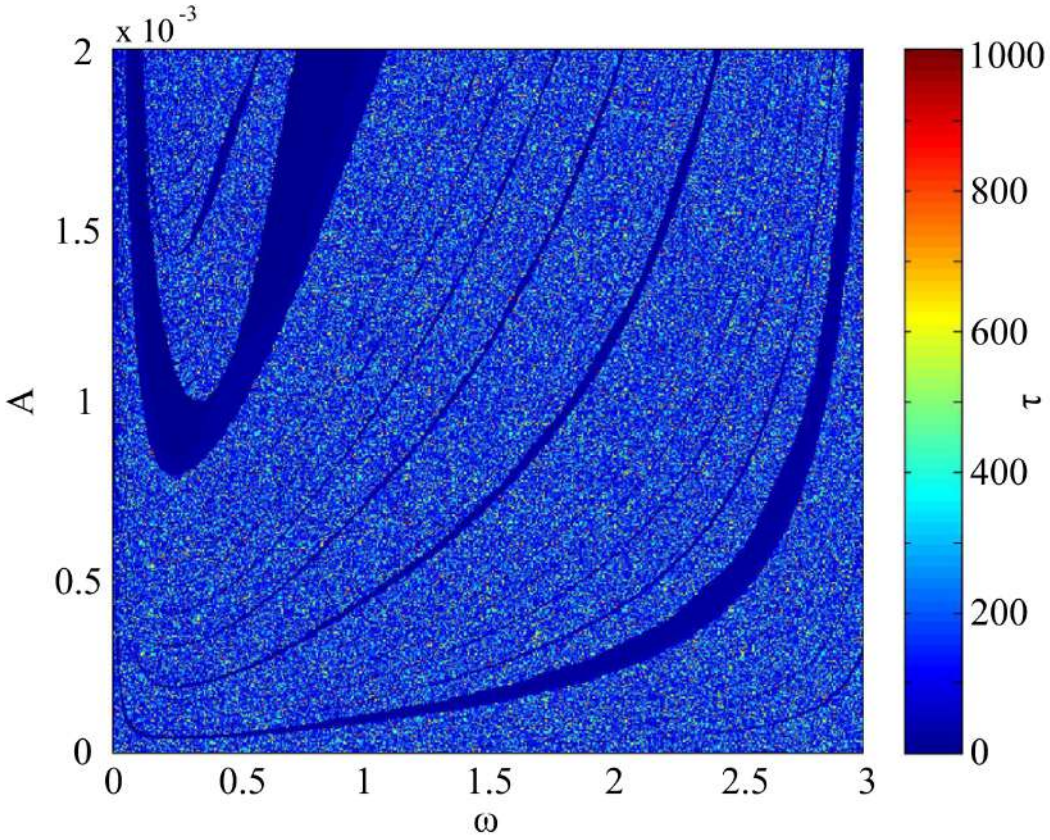

Рис. 1.12 – Карта времён жизни τ переходного хаоса в плоскости параметров воздействия (ω, A) для фиксированного начального условия $x_0 = 0{,}25$, $\gamma_0 = \gamma_{cr} + 0{,}001$. Цветовая шкала кодирует величину τ: тёмно-синие компактные области — минимальные времена жизни (ускоренный выход); остальная часть плоскости — мозаичная структура с тесно перемежающимися значениями τ, в среднем существенно превышающими статическое значение $\tau_{\text{stat}} \approx 250$. Фрактальные границы между областями отражают чувствительность динамики к параметрам воздействия.

1.4. Заключение к главе 1

В настоящей главе введены модели активных элементов, используемые на протяжении всей диссертации, установлены связи между моделями различного уровня детализации и получены аналитические результаты для наиболее

сложных динамических режимов — хаотических бёрстовых колебаний и управляемого переходного хаоса. Основные результаты, опубликованные в работах [A1–A4], состоят в следующем.

1. Введена классификация моделей активных элементов по характеру генерируемого сигнала (спайковый / непрерывный) и уровню физической детализации (модели с физической интерпретацией переменных / абстрактные). Описаны десять конкретных моделей, используемых в диссертации: дискретная модель Курбажа–Некоркина (КН), модель накопление–сброс с утечкой (LIF), адаптивная экспоненциальная модель (AdEx), ФитцХью–Нагумо, Стюарта–Ландау, Баутина, частотная модель, а также рекуррентные ячейки ESN, GRU, LSTM. Установлена иерархия предельных переходов между моделями (усреднение по популяции и по времени, дискретизация, добавление вентильных механизмов, переход к нормальной форме) и введена единая терминология динамического анализа (аттракторы, бифуркации, показатели Ляпунова, бассейны притяжения), применяемая ко всем моделям.

2. Описан новый тип релаксационных систем в рамках дискретных отображений (динамических систем с дискретным временем), в которых хаотическая динамика реализуется непосредственно на быстром временном масштабе. В отличие от ранее изученных быстро-медленных систем, где структура аттрактора образована гладкими многообразиями медленных движений и быстрыми переходами между ними, в данном классе систем наряду с этими геометрическими объектами присутствуют области переходного хаоса.

3. Сформулированы условия на быструю подсистему, при выполнении ко-

торых в полной системе возникает релаксационный аттрактор с чередованием участков медленных регулярных и быстрых хаотических движений.

4. Получена аналитическая оценка старшего показателя Ляпунова: $\lambda_1 \approx \kappa \cdot \overline{\lambda}_{\text{fast}}$, где κ — коэффициент заполнения (доля времени, проводимого фазовой траекторией в области хаотической динамики быстрой подсистемы), $\overline{\lambda}_{\text{fast}}$ — средний показатель Ляпунова хаотического аттрактора быстрой подсистемы. Хаотические свойства аттрактора полной быстро-медленной системы наследуются от хаотических аттракторов быстрой подсистемы.

5. Общий механизм проиллюстрирован на дискретной модели Курбажа–Некоркина. Для этой модели в явном виде получены координаты неподвижных точек, границы инвариантного интервала, построена инвариантная область и выполнена верификация оценки.

6. Установлены гладкие зависимости периода T, длительности активного участка T_{act} и числа спайков в бёрсте N_{spb} от параметров ε и J, свидетельствующие о структурной устойчивости хаотического аттрактора по отношению к вариации параметров модели.

7. Исследовано влияние периодической модуляции управляющего параметра на переходный хаос в отображении лоренцевского типа в надкритической области. В этой области аттракторный хаос отсутствует, однако сохраняется непритягивающее хаотическое множество, на котором траектории демонстрируют нерегулярное поведение конечной длительности. Переходный хаос характеризуется вероятностью выживания — долей траекторий из заданного ансамбля начальных условий, которые не покинули окрестность непритягивающего хаотического множества.

8. Получено аналитическое приближение для вероятности выживания хаотической динамики в квазистационарном подходе, основанном на линейной зависимости мгновенной скорости выхода из хаотической области от управляющего параметра. Формула явно разделяет монотонный и осциллирующий вклады в темп покидания хаотической области. Установлены три качественно различных предельных режима убывания: при низких частотах модуляции — экспоненциальное убывание; при высоких — экспоненциальное убывание с увеличенной эффективной скоростью; при промежуточных — осциллирующее немонотонное убывание с чередованием участков ускоренного и замедленного выхода.

9. Показано, что в отличие от монотонно нарастающего управляющего параметра, при котором возможна только задержка выхода с непритягивающего множества, периодическая модуляция допускает как ускорение, так и замедление процесса выхода из хаотической области в зависимости от соотношения параметров модуляции.

10. Исследована зависимость обобщённой скорости выхода от амплитуды и отстройки для различных частот.

11. Построена карта времён жизни переходного хаоса на плоскости параметров модуляции, имеющая мозаичную структуру с компактными областями минимальных времён жизни (ускоренный выход из хаотической области) и обширными областями, в которых времена жизни *в среднем* существенно превышают статическое значение (более чем в 4 раза), хотя внутри этих областей точки с различными временами тесно перемежаются. Границы между областями имеют фрактальный характер.

12. Исследована структура непритягивающего хаотического множества в пространстве состояний. Обнаружена иерархия щелей выхода — прообразов основной щели вблизи точки разрыва, — определяющая статистику времён жизни переходного хаоса.

Результаты настоящей главы устанавливают репертуар динамических режимов одиночного активного элемента — от возбудимости и регулярных колебаний до хаотических бёрстовых колебаний и управляемого переходного хаоса — и вводят единую терминологию описания, применяемую ко всем моделям диссертации.

В следующей главе осуществляется переход от одиночного элемента к ансамблям: модель Курбажа–Некоркина используется как элемент сетей с различной структурой связей, в которых исследуется бассейновая устойчивость синхронизации бёрстовых колебаний в сетях типа «малый мир», переходные последовательности в сетях с адаптивными связями и мультиплексные структуры из осцилляторов Стюарта–Ландау и Баутина.

В Главах 3 и 4 частотные модели, рекуррентные ячейки с вентильными механизмами (ESN, GRU, LSTM) и спайковые модели (LIF, AdEx) применяются для построения обучаемых нелинейных сетей. Анализ динамики обученных сетей ведётся на языке аттракторов, бифуркаций и показателей Ляпунова, введённом в настоящей главе.

ГЛАВА 2. КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ

В Главе 1 описаны динамические режимы одиночного активного элемента — от возбудимости и регулярных колебаний до хаотических бёрстовых колебаний и управляемого переходного хаоса. Настоящая глава переходит на уровень сетей и исследует, как взаимодействие между элементами и архитектура связей определяют *коллективные режимы* и их *устойчивость* к конечным возмущениям.

Центральный вопрос главы: *какие свойства топологии, силы связи и индивидуальной динамики элементов обеспечивают робастность коллективных функциональных режимов?*

частей систем, описывающих активность узлов, так и варьирование структуры связей сетей.

Ответ на этот вопрос существен по трём причинам. Во-первых, в крупномасштабных нелинейных сетях обычно сосуществует множество колебательных режимов, и принципиально важно знать, насколько робастен конкретный режим к возмущениям [70, 71]. Во-вторых, биологические нейронные сети являются адаптивными системами, в которых структура связей непрерывно перестраивается [72, 73], и необходимо понимать, как эта перестройка влияет на коллективную динамику. В-третьих, переходные — а не стационарные — режимы всё чаще рассматриваются как носители функциональной активности [11, 74], что требует инструментов анализа, выходящих за рамки классической теории аттракторов.

Глава организована как последовательное продвижение от простых к более сложным сетевым архитектурам, причём на каждом шаге возрастает как сложность топологии, так и разнообразие коллективной динамики.

Синхронизация бёрстов и бассейновая устойчивость. Отправная точка — синхронизация бёрстов в сетях хаотических быстро–медленных осцилляторов. Синхронизация бёрстов — режим, при котором активные фазы различных элементов начинаются и заканчиваются в близкие моменты времени, тогда как отдельные спайки внутри бёрстов не обязательно совпадают [75—77]. Для физических и биологических сетей важна не только локальная устойчивость синхронного состояния (исследуемая методами линейного анализа [45, 78]), но и его *нелокальная устойчивость* — способность возвращаться к синхронному режиму после возмущений конечной амплитуды. Количественной мерой нелокальной устойчивости служит *бассейновая устойчивость* [49, 79] — относительный объём бассейна притяжения целевого режима в фазовом пространстве.

Для сетей осцилляторов Рёсслера с топологией «малого мира» было показано [49], что бассейновая устойчивость синхронизации максимальна при промежуточных значениях вероятности перестройки связей. Однако бёрстовые осцилляторы обладают существенными особенностями — двумя временны́ми масштабами, хаотической внутренней динамикой и нетривиальной зависимостью формы колебаний от параметров — что делает перенос этого результата нетривиальным. Многие анатомические и функциональные сети мозга подтверждённо обладают свойствами «малого мира» [80—82], а паттерн связей и сила взаимодействия играют существенную роль в синхронизации бёрстов [83—85]. В разделе 2.1 проводится систематическое исследование бассейновой устойчивости синхронизации бёрстов в сетях «малого мира» хаотических быстро–медленных

осцилляторов и устанавливается оптимальность архитектуры «малого мира» по критерию бассейновой устойчивости.

Адаптивные сети и переходные последовательности. Следующий шаг — отказ от фиксированной топологии. Взаимосвязь между структурой и динамикой — фундаментальное свойство сложных сетей [86—88]: динамика узлов изменяет веса связей, а топология влияет на динамические атрибуты. Наиболее общий способ описания таких систем — моделирование их как *адаптивных* (коэволюционных) сетей [72, 89, 90], где все характеристики — структурные и динамические — изменяются во времени и влияют друг на друга. Адаптивность приводит к разнообразным коллективным эффектам: формированию кластеров, химерных режимов, возникновению модульной структуры [91—94].

В нейронауках также зачастую фокус исследований зачастую смещается от аттракторов к *переходным процессам* [11, 74]. Переходная или транзитивная динамика пространственно-временны́х паттернов и коэволюционирующие архитектуры связей рассматриваются как базовые свойства, лежащие в основе сложных функций мозга [95—97]. Было высказано предположение и экспериментально подтверждено, что при каждом акте восприятия возникает *динамическое ядро* — ансамбль пространственно распределённых нейронов, функционирующий согласованно [98—100]. Этот процесс обладает высокой переходностью, что позволяет сети быстро менять паттерн активации, отражая многозадачность и функциональную сегрегацию [101—103].

Гетероклинические контуры в нейронных ансамблях и принцип «конкуренции без победителя» [104—106] формируют математическую основу для описания воспроизводимой последовательной активности. Пространственный хаос в цепочках связанных бистабильных осцилляторов [107, 108] и синергетические

явления в активных решётках [9, 38] представляют собой примеры сложной пространственной самоорганизации.

Всё более сложные сетевые модели — временные, мультиплексные, многослойные сети [109—112] и гиперсети [113, 114] — позволяют описывать иерархическую структуру и многоуровневую динамику таких систем.

В разделе 2.2 рассматриваются адаптивные сети спайковых осцилляторов с перестраиваемой топологией связей, и вводится гиперсетевое описание, позволяющее отслеживать метастабильные коллективные состояния и переходные последовательности между ними.

Мультиплексные сети и пространственные доменные структуры. Третий шаг — переход к многослойным архитектурам. Мультиплексные сети — особая форма многослойных сетей со взаимно однозначным соответствием узлов между слоями [115, 116] — моделируют взаимодействия одного множества узлов через несколько типов связей. В нейронных сетях, например, клетки взаимодействуют как через химические синапсы, так и через электрические щелевые контакты, что естественно описывается дуплексной мультиплексной структурой.

Сети осцилляторных элементов с фазово-амплитудной динамикой демонстрирую широкий спектр коллективных эффектов [117—121]. Осцилляторы Стюарта–Ландау — нормальная форма суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа (1.1.3) — служат парадигматическим элементом для исследования фазово-амплитудной динамики в сетевых системах [122]. Корреляция между структурой и динамикой в осцилляторных сетях приводит к таким явлениям, как удалённая синхронизация [123, 124] и взрывной переход к синхронизации [125, 126].

Совместное действие мультиплексности и нелинейной динамики приводит к новым типам синхронизации и химерным состояниям [127—130]. В разделе 2.3 исследуются мультиплексные сети осцилляторов Стюарта–Ландау и массивы осцилляторов Баутина (обобщённая бифуркация Андронова–Хопфа [44]) и анализируется формирование и перенос пространственных доменных структур между слоями.

Связь разделов. Три раздела главы объединены общей логикой: от *фиксированной* топологии и *стационарного* коллективного режима (синхронизация бёрстов, 2.1) через *адаптивную* топологию и *переходную* динамику (метастабильные последовательности, 2.2) к *многослойной* архитектуре и *пространственной* организации коллективных состояний (доменные структуры, 2.3). На каждом шаге возрастает как структурная сложность сети, так и разнообразие коллективных режимов, а инструменты анализа (бассейновая устойчивость, гиперсетевое описание, межслойные корреляции) обеспечивают количественные характеристики устойчивости и функциональности.

Результаты настоящей главы устанавливают, какие архитектуры и параметры связей обеспечивают устойчивые и переключаемые коллективные режимы — знание, необходимое для перехода к целенаправленному формированию функциональности посредством обучения в Главах 3 и 4. Бассейновая устойчивость, исследованная в разделе 2.1, может рассматриваться как мера того, насколько «широко» в фазовом пространстве притягивает целевой аттрактор — понятие, которое станет центральным при обсуждении обучения как управляемой деформации бассейнов притяжения в последующих главах.

2.1. Нелокальная устойчивость синхронизации бёрстов в сетях хаотических осцилляторов

Синхронизация представляет собой один из фундаментальных коллективных режимов в нелинейных сетях. Для физических и биологических сетей принципиально важна не только *локальная* устойчивость синхронного состояния к малым возмущениям, исследуемая методами линейного анализа [45, 78], но и его *нелокальная* устойчивость — способность возвращаться к синхронному режиму после возмущений конечной амплитуды. В настоящем разделе нелокальная устойчивость синхронизации бёрстов исследуется с помощью концепции *бассейновой устойчивости* (S_B) [49], измеряющей относительный объём бассейна притяжения целевого режима в фазовом пространстве.

Центральный результат раздела: архитектура «малого мира» максимизирует бассейновую устойчивость синхронизации бёрстов в сетях хаотических быстро–медленных осцилляторов. Существенное отличие от ранее исследованного случая осцилляторов Рёсслера [49] состоит в том, что убывание $S_B(P_{\text{rew}})$ при увеличении случайности оказывается не экспоненциальным, а близким к линейному, и имеются широкие интервалы P_{rew}, на которых S_B сохраняет максимальное значение. Это означает, что бёрстовые осцилляторы демонстрируют синхронизацию, более робастную к перестройке топологии в смысле бассейновой устойчивости.

2.1.1. Сложные сети хаотических осцилляторов

В качестве элементов сети используются дискретные быстро–медленные осцилляторы Курбажа–Некоркина (1.1), демонстрирующие хаотические бёрстовые колебания в соответствии с механизмом, исследованным в разделе 1.2. Ди-

намика i-го узла ($i = 1, \dots, N$) описывается системой:

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = x_{i,n} + F_H(x_{i,n}) - y_{i,n} + I_{i,n}, \\ y_{i,n+1} = y_{i,n} + \varepsilon\,(x_{i,n} - J_i), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время, $x_{i,n}$ и $y_{i,n}$ — быстрая и медленная переменные i-го осциллятора, $\varepsilon \ll 1$ — параметр разделения масштабов, J_i — параметр возбудимости i-го осциллятора. Нелинейная функция

$$F_H(x) = x(x-a)(1-x) - \beta\, H(x-d) \tag{2.2}$$

содержит кубическую часть и разрыв, определяемый функцией Хевисайда $H(\cdot)$. Параметры a, β, d контролируют динамический режим; форма сигналов определяется параметром a, период — параметрами ε и J_i. Варьированием β и d можно изменять амплитуду и число спайков в бёрстах.

Рассматриваются сети *неидентичных* осцилляторов: значения J_i являются гауссовски распределёнными случайными величинами со средним J_0 и стандартным отклонением δ_J.

Взаимодействие между узлами — диффузионная связь по быстрой переменной:

$$I_{i,n} = \frac{c}{N} \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\,(x_{j,n} - x_{i,n}), \qquad i = 1, \dots, N, \tag{2.3}$$

где c — параметр силы связи, а G_{ij} — элементы матрицы смежности: $G_{ij} = 1$, если между узлами i и j есть ненаправленное ребро, и $G_{ij} = 0$ в противном случае.

Топология Уоттса–Строгаца. Построение начинается с регулярного кольца из N вершин, в котором каждый узел связан с $2k$ ближайшими соседями, т. е.

степень каждого узла равна $2k$. Затем каждое ребро с вероятностью P_{rew} переподключается к случайно выбранной вершине (без петель и кратных рёбер). Полное число рёбер kN не изменяется. Параметр P_{rew} непрерывно интерполирует между регулярной решёткой ($P_{\text{rew}} = 0$) и случайным графом ($P_{\text{rew}} = 1$). В промежуточной области реализуется топология «малого мира» — одновременно высокий коэффициент кластеризации и малая средняя длина пути [7, 131].

Осциллограммы бёрстовых колебаний в сети для различных значений P_{rew} показаны на рис. 2.1. В чисто регулярной сети (рис. 2.1а) спайки активных фаз различных осцилляторов появляются со сдвигом друг относительно друга, тогда как в сети с перестроенными рёбрами (рис. 2.1б) спайки возникают в более близкие моменты времени.

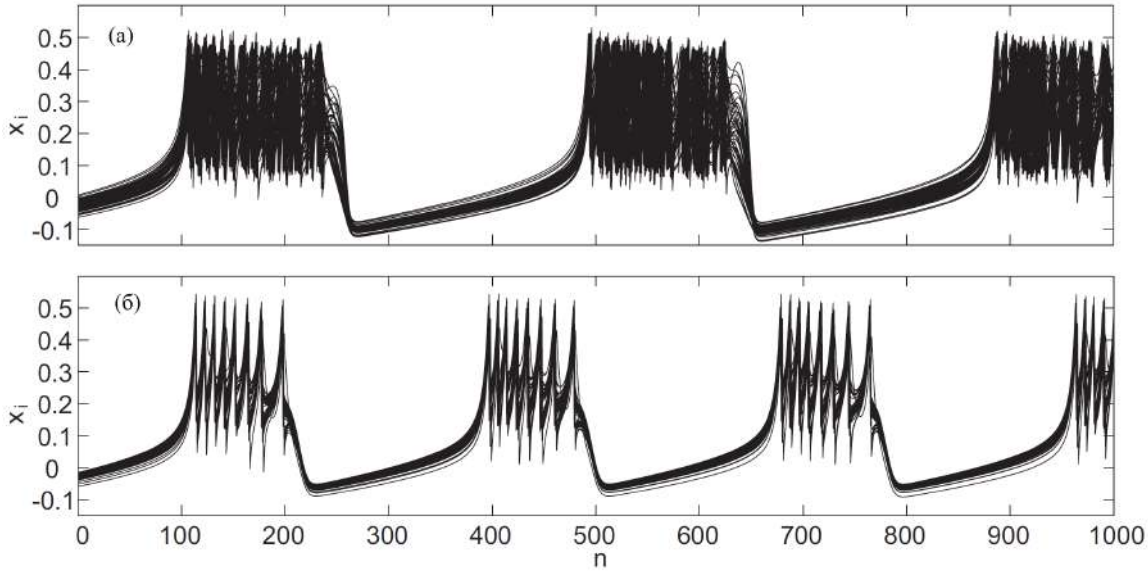

Рис. 2.1 – Бёрстовые колебания в сети из $N = 50$ узлов (2.1) при различных значениях вероятности перестройки: (а) $P_{\text{rew}} = 0$ (регулярная сеть); (б) $P_{\text{rew}} = 0{,}3$ (сеть «малого мира»). Показаны переменные $x_i(n)$ нескольких осцилляторов. Параметры: $c = 1$, $k = 11$, $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}015$.

2.1.2. Мера синхронизации бёрстов и определение «бассейновой» устойчивости

Стандартный способ оценки синхронизации бёрстов [83, 132, 133] состоит во введении фазовой переменной для каждого осциллятора и вычислении комплексного параметра порядка в смысле Курамото [43]. Однако для хаотических колебаний с переменным периодом определение фазы неоднозначно. Здесь используется альтернативный безфазовый метод, предложенный в [134, 135] и развитый в [136], основанный на нахождении совпадающих активных фаз.

Определение активной фазы. Поскольку осцилляторы неидентичны (имеют различные J_i), вводится минимальное значение параметра возбудимости по ансамблю: $J_{\min} = \min_{i=1\ldots N} J_i$. Осциллятор i считается находящимся в *активной фазе* в момент n, если $x_{i,n} > J_{\min}$, и в *пассивной фазе* в противном случае. Формально вводится индикаторная переменная

$$\chi_{i,n} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{i,n} > J_{\min}, \\ 0, & \text{если } x_{i,n} \leqslant J_{\min}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Параметр синхронизации бёрстов. На основе (2.4) вычисляются две интегральные характеристики. Суммарная длительность активных фаз, усреднённая по всем узлам:

$$T_{\text{act}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=0}^{T} \chi_{i,n}. \tag{2.5}$$

Суммарное время, в течение которого *все* осцилляторы одновременно пребывают в активной фазе:

$$T_{\text{coin}} = \sum_{n=0}^{T} \prod_{i=1}^{N} \chi_{i,n}. \tag{2.6}$$

Параметр синхронизации бёрстов определяется как отношение

$$\sigma = \frac{T_{\text{coin}}}{T_{\text{act}}} \in [0, 1]. \tag{2.7}$$

Значение $\sigma = 1$ соответствует идеальной синхронизации бёрстов: активные фазы всех осцилляторов полностью совпадают во времени. Значение $\sigma = 0$ указывает на полное отсутствие временно́й корреляции между бёрстами.

Сравнение данного метода с фазовым подходом к синхронизации бёрстов показало качественное совпадение результатов [135, 136].

Выбор порога синхронизации. Для определения режима синхронизации бёрстов вводится пороговое значение σ_{th}: синхронный режим считается достигнутым, если $\sigma > \sigma_{\text{th}}$. Для временны́х рядов, стартующих с различных начальных условий и (или) различных реализаций графа, значения σ варьируются вследствие хаотической динамики, неидентичности осцилляторов и топологической вариабельности. Распределения σ для различных значений ε показаны на рис. 2.2. Ширина и положение максимумов этих распределений существенно различаются. В большинстве расчётов используется $\sigma_{\text{th}} = 0{,}85$; влияние выбора порога ($\sigma_{\text{th}} = 0{,}8$ и $\sigma_{\text{th}} = 0{,}9$) обсуждается отдельно.

Определение бассейновой устойчивости. Чтобы характеризовать относительный объём бассейна притяжения режима синхронизации бёрстов, выполняется следующая процедура. Для каждого набора сетевых параметров генерируется M независимых реализаций. В каждой реализации:

1. начальные условия $(x_{i,0}, y_{i,0})$ для всех N осцилляторов выбираются слу-

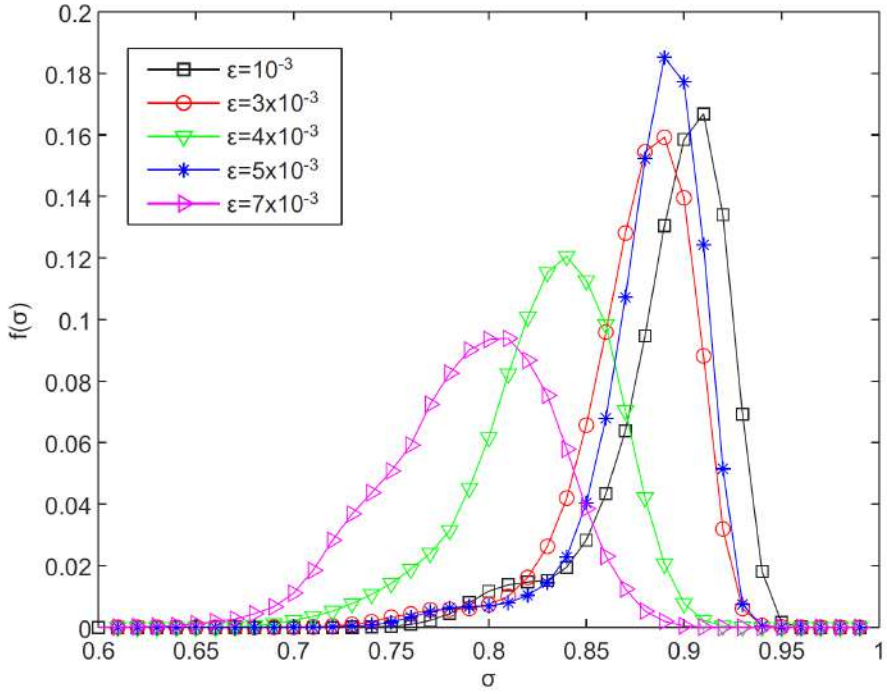

Рис. 2.2 – Распределения значений параметра синхронизации σ для различных значений ε ($\varepsilon = 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 7 \times 10^{-3}$). Параметры: $N = 50$, $P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $k = 11$, $c = 1$, $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}01$.

чайным образом из равномерного распределения в области

$$\mathcal{A} = \{-0{,}12 < x_i < 0{,}5;\ -0{,}005 < y_i < 0{,}035\}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad (2.8)$$

в которой локализован хаотический аттрактор индивидуального осциллятора;

2. генерируется новая реализация графа с заданными параметрами (N, k, P_{rew});
3. система (2.1)–(2.3) итерируется в течение T шагов, из которых первые T_0 отбрасываются как переходный процесс;
4. по оставшимся $T - T_0$ шагам вычисляется значение σ по формуле (2.7).

Бассейновая устойчивость определяется как

$$S_B = \frac{M_s}{M}, \quad (2.9)$$

где M_s — число реализаций, для которых $\sigma > \sigma_{\text{th}}$. Значение $S_B \in [0,1]$; S_B близкое к единице означает, что сеть с высокой вероятностью приходит к синхронному состоянию из произвольных начальных условий.

Существенно, что (2.9) учитывает усреднение одновременно по начальным условиям (x_i, y_i) и по ансамблю различных графов с одинаковыми параметрами структуры сетей (N, k, P_{rew}).

2.1.3. Оптимальность архитектуры «малого мира»

Систематический анализ зависимости $S_B(P_{\text{rew}})$ выявил её существенно немонотонный характер (рис. 2.3). Для трёх из пяти исследованных значений ε ($\varepsilon = 10^{-3}, 5\times10^{-3}, 7\times10^{-3}$) кривые $S_B(P_{\text{rew}})$ имеют крутую возрастающую часть ниже некоторого критического значения P^*_{rew} и пологую убывающую часть выше P^*_{rew}. Для двух других значений ($\varepsilon = 3\times10^{-3}, 4\times10^{-3}$) кривые располагаются значительно ниже, однако обнаруживают аналогичную, хотя и менее выраженную, структуру с максимумом.

Качественно этот результат аналогичен случаю сетей «малого мира» из осцилляторов Рёсслера [49], однако имеется существенное отличие: убывание $S_B(P_{\text{rew}})$ при увеличении P_{rew} не является экспоненциальным, а близко к линейному, и отсутствуют столь выраженные пики, как в сетях осцилляторов Рёсслера. Имеются *широкие интервалы* P_{rew}, на которых S_B сохраняет максимальное значение. Кривые чувствительны к параметру ε: максимум S_B для $\varepsilon = 10^{-3}$ значительно превышает таковой для $\varepsilon = 4\times10^{-3}$; кривая для $\varepsilon = 5\times10^{-3}$ лежит выше кривой для $\varepsilon = 4\times10^{-3}$ при всех P_{rew}.

Физическая интерпретация. В регулярной решётке синхронизация бёрстов ограничена медленным распространением корреляций вдоль цепочки ближай-

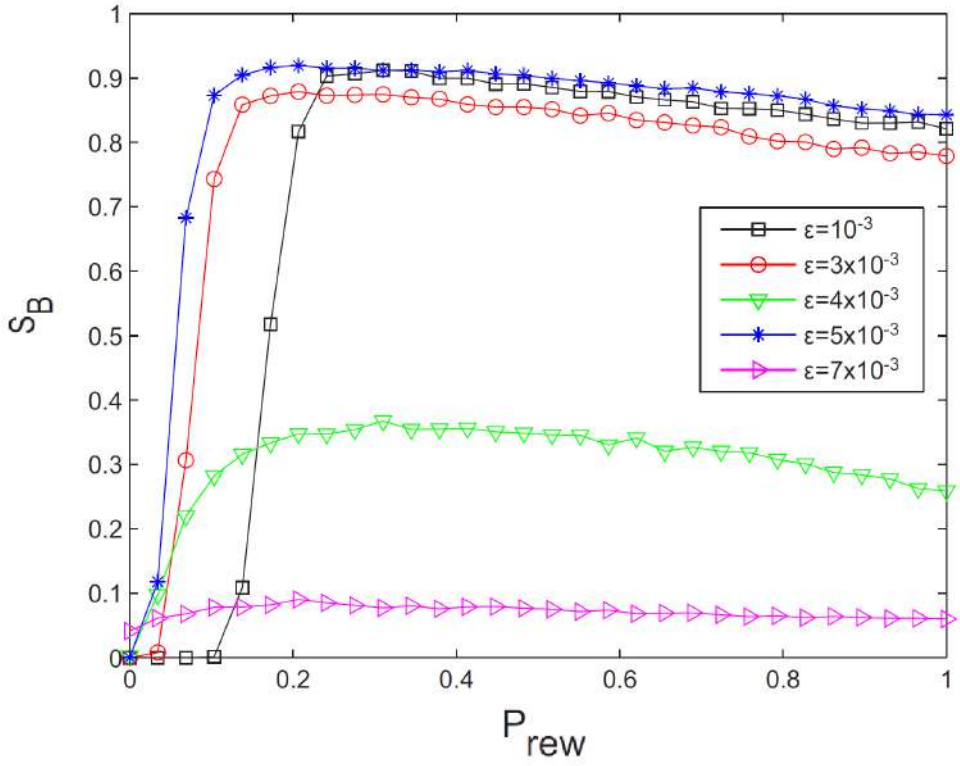

Рис. 2.3 – Бассейновая устойчивость синхронизации бёрстов S_B в зависимости от вероятности переподключения P_{rew} для различных значений ε ($\varepsilon = 10^{-3}$, 3×10^{-3}, 4×10^{-3}, 5×10^{-3}, 7×10^{-3}). Максимум S_B достигается в области топологии «малого мира»; убывание при увеличении P_{rew} близко к линейному (в отличие от экспоненциального для осцилляторов Рёсслера). Параметры: $N = 50$, $k = 11$, $c = 1$, $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}01$.

ших соседей и наличием множества метастабильных кластерных конфигураций. Добавление небольшого числа дальних связей резко сокращает характерную длину путей в графе, что способствует быстрому глобальному согласованию медленной динамики; при этом сохраняющаяся локальная структура препятствует чрезмерному усилению флуктуаций. В полностью случайном графе отсутствие пространственной регулярности усиливает влияние неоднородностей и облегчает формирование асинхронных коллективных режимов.

2.1.4. Оптимальные значения плотности и силы связей

Помимо P_{rew}, бассейновая устойчивость существенно зависит от степени узлов k и силы связи c (рис. 2.4).

Для очень разреженных сетей (малые k) S_B близка к нулю: взаимодействие слишком слабо для синхронизации. Выше порогового значения k бассейновая устойчивость быстро возрастает. Однако для очень плотных сетей (например, $k > 20$ при $N = 50$) S_B начинает *убывать*: с увеличением числа связей (при фиксированных остальных параметрах) член связи $I_{i,n}$ в системе (2.1) возрастает, спайк-бёрстовые колебания искажаются, и появляются выбросы из активных хаотических фаз в пассивные. Согласно критерию (2.7), это означает уменьшение длительности одновременной генерации бёрстов, и синхронное состояние может не быть достигнуто.

Аналогичный эффект наблюдается при увеличении силы связи c. Во всех случаях существует пороговое значение c, выше которого S_B возрастает и достигает максимума. При дальнейшем увеличении c бассейновая устойчивость убывает по тем же причинам; при ещё бóльших c член связи $I_{i,n}$ может стать настолько большим, что индивидуальные осцилляторы покидают свои парциальные аттракторы, соответствующе форме брстовых колебаний, и уходят на

бесконечность.

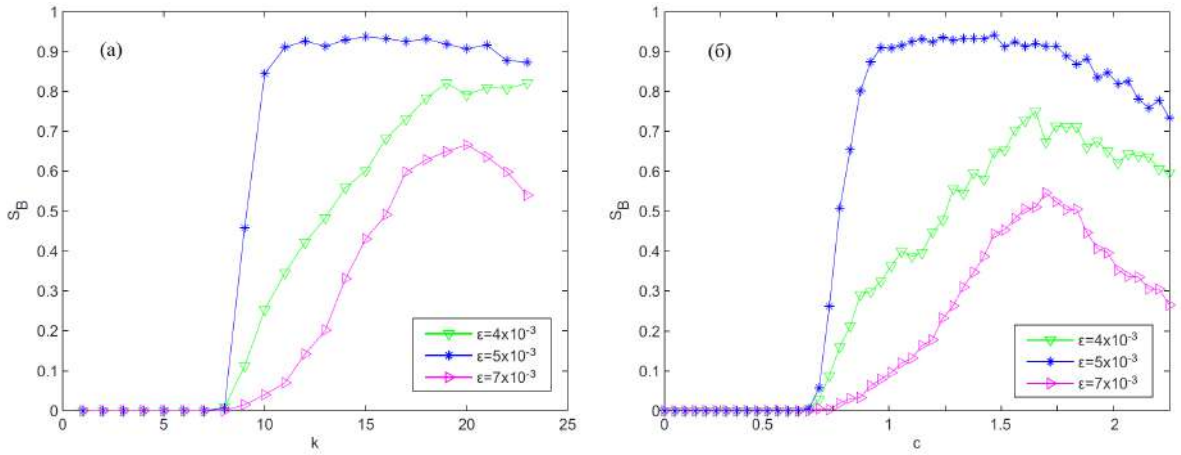

Рис. 2.4 – Бассейновая устойчивость S_B в зависимости от (а) степени узлов k (при $c = 1$) и (б) силы связи c (при $k = 11$) для различных значений ε ($\varepsilon = 4 \times 10^{-3}$, 5×10^{-3}, 7×10^{-3}). Параметры: $N = 50$, $P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}01$.

Скейлинг с размером сети. Проверка для $N = 50 \div 150$ показала, что переход от низкой к высокой бассейновой устойчивости происходит вблизи $k \approx 0{,}2\,N$ для широкого диапазона параметров (рис. 2.5а), а по силе связи — вблизи $c \approx 1{,}0$ (рис. 2.5б).

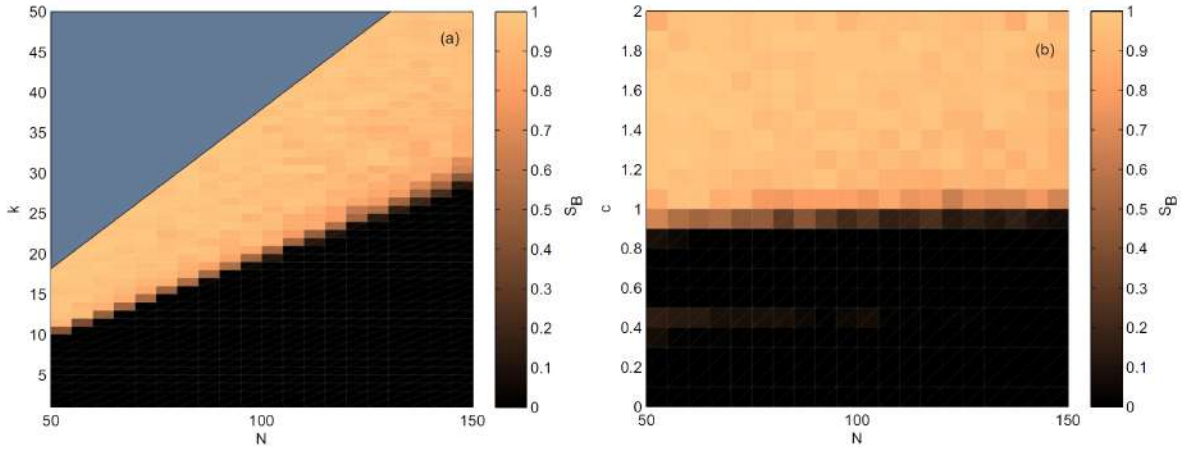

Рис. 2.5 – Бассейновая устойчивость S_B в плоскости (а) (N, k) при $c = 1$ и (б) (N, c) при $k = 0{,}2N$. Цветовая шкала — значение S_B. Параметры: $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}01$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $P_{\text{rew}} = 0{,}3$. Переход к высокой S_B происходит вблизи $k \approx 0{,}2N$ и $c \approx 1{,}0$.

2.1.5. Деформация структуры фазового пространства

Для установления связи между деформацией фазового пространства и перестройкой топологии исследуются распределения плотности вероятности. Рассматривается движение усреднённых по сети координат

$$x_{\text{mean}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j, \qquad y_{\text{mean}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j \tag{2.10}$$

на фазовой плоскости (x, y). Для M различных реализаций с заданными сетевыми параметрами вычисляются временны́е ряды $(x_{\text{mean}}(n), y_{\text{mean}}(n))$. На область $\mathcal{A}$ (2.8) накладывается разбиение прямоугольниками $R_{x,y}$ размером $\Delta x \times \Delta y$. Плотность вероятности определяется как

$$\rho_{x,y} = \frac{N_{x,y}}{M\,T\,\Delta x\,\Delta y}, \tag{2.11}$$

где $N_{x,y}$ — число точек, попавших в прямоугольник $R_{x,y}$, T — длительность временно́го ряда.

Распределения $\rho_{x,y}$ для двух значений P_{rew} показаны на рис. 2.6. Оба распределения обнаруживают сходство с хаотическим аттрактором индивидуального осциллятора (ср. рис. 1.5а): левая ветвь медленных регулярных движений и правая область быстрых хаотических движений. Однако между распределениями $\rho^{(1)}_{x,y}$ ($P_{\text{rew}} = 0$) и $\rho^{(2)}_{x,y}$ ($P_{\text{rew}} = 0{,}3$) имеются существенные различия.

Во-первых, распределение $\rho^{(2)}_{x,y}$ демонстрирует более отчётливую полосчатую структуру в хаотической области, соответствующую фазовым областям с наиболее вероятным посещением. Это подтверждается проекциями на вертикальные линии $x = 0{,}2$, $x = 0{,}3$, $x = 0{,}4$ (рис. 2.6в–д).

Во-вторых, распределение для $P_{\text{rew}} = 0$ имеет бо́льшую протяжённость

по направлению y как в регулярной, так и в хаотической частях по сравнению со случаем $P_{\text{rew}} = 0{,}3$.

Поскольку рис. 2.6б соответствует случаю с наивысшей бассейновой устойчивостью, фазовые траектории, движущиеся преимущественно в области $\rho^{(2)}_{x,y}$, определяют режим синхронизации бёрстов. В случае $\rho^{(1)}_{x,y}$ траектории проводят значительное время в верхней области фазового пространства, лежащей за пределами $\rho^{(2)}_{x,y}$, и потому не вносят вклада в синхронизацию бёрстов, что объясняет близкую к нулю бассейновую устойчивость регулярной сети.

Сравнение распределения $\rho_{x,y}$ для произвольной топологии с эталонным $\rho^{(2)}_{x,y}$ позволяет предсказать, приведёт ли данная топология к высокой бассейновой устойчивости (если $\rho_{x,y}$ подобно $\rho^{(2)}_{x,y}$) или к низкой (если $\rho_{x,y}$ близко к $\rho^{(1)}_{x,y}$).

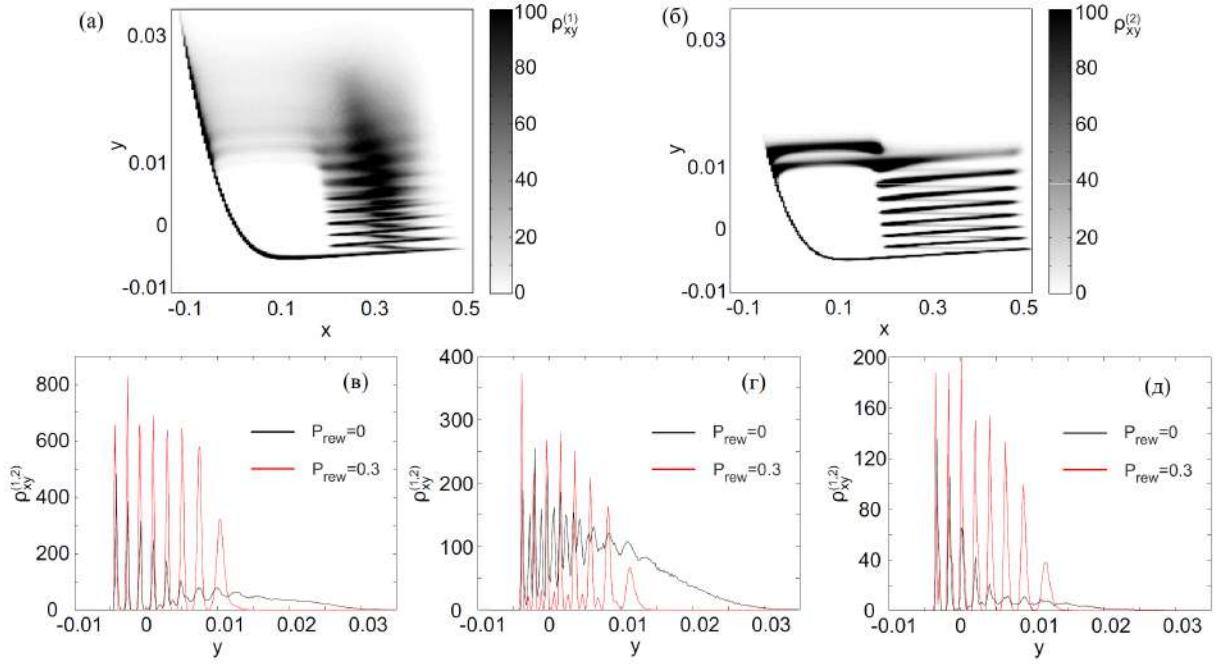

Рис. 2.6 – Распределение плотности вероятности $\rho_{x,y}$ (2.11) в фазовой плоскости (x, y) для усреднённых по сети траекторий (2.10): (а) $P_{\text{rew}} = 0$ (регулярная сеть); (б) $P_{\text{rew}} = 0{,}3$ («малый мир»). Проекции на вертикальные линии: (в) $x = 0{,}2$; (г) $x = 0{,}3$; (д) $x = 0{,}4$. Компактное и структурированное распределение для «малого мира» коррелирует с высокой S_B. Параметры: $N = 50$, $k = 11$, $c = 1$, $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}01$.

2.1.6. Влияние параметров элементов

Параметр разделения масштабов ε. При фиксированных сетевых параметрах ($P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $k = 11$, $c = 1$) зависимость $S_B(\varepsilon)$ обнаруживает несколько выраженных максимумов и минимумов (рис. 2.7). Например, при $J_0 = 0{,}1$ наблюдаются два максимума при $\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$ и $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ и минимумы при $\varepsilon = 4 \times 10^{-3}$ и $\varepsilon = 8 \times 10^{-3}$.

Характер зависимости сохраняется при изменении порога синхронизации σ_{th}: кривые для $\sigma_{\text{th}} = 0{,}8$ и $\sigma_{\text{th}} = 0{,}9$ повторяют основные свойства кривой для $\sigma_{\text{th}} = 0{,}85$, т. е. качественно воспроизводят положения максимумов и минимумов. Чем выше σ_{th}, тем ниже S_B, поскольку меньшее число начальных условий приводит к синхронному состоянию, удовлетворяющему более жёсткому критерию.

Влияние размера сети также проведено: для $N = 100$ (с $k = 22$) кривые $S_B(\varepsilon)$ качественно аналогичны случаю $N = 50$ — максимумы и минимумы расположены при тех же значениях ε, однако бассейновая устойчивость бóльшей сети в целом ниже.

Параметр возбудимости J_0. Зависимость $S_B(J_0)$ для трёх значений ε показана на рис. 2.8а. При $\varepsilon = 10^{-3}$ бассейновая устойчивость монотонно возрастает от малых значений и приближается к единице. Для $\varepsilon = 4 \times 10^{-3}$ и $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ наблюдаются осциллирующие кривые $S_B(J_0)$. При изменении ε с 4×10^{-3} до 5×10^{-3} координаты максимумов и минимумов S_B по J_0 смещаются.

Неоднородность сети. Влияние параметра δ_J (мера неидентичности осцилляторов) показано на рис. 2.8б. Увеличение δ_J приводит к *монотонному* уменьшению S_B: идентичные осцилляторы и осцилляторы с малым разбросом обладают

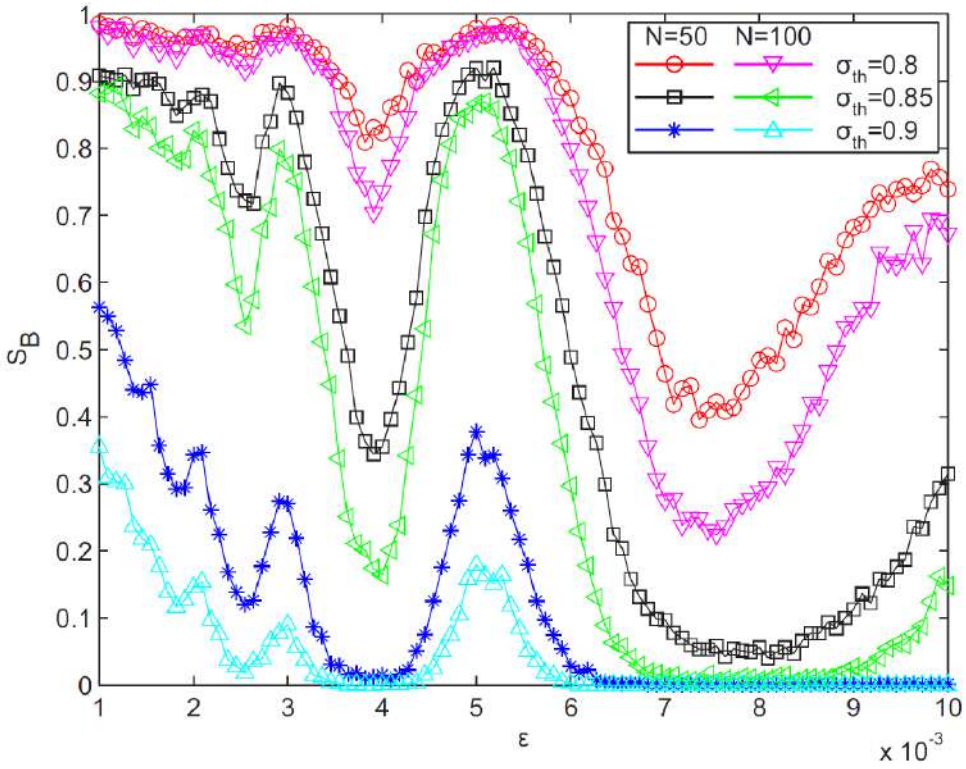

Рис. 2.7 – Бассейновая устойчивость S_B в зависимости от ε. Показано влияние порога σ_{th} и размера сети N. Для $N = 50$: $k = 11$; для $N = 100$: $k = 22$. Параметры: $P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $c = 1$, $J_0 = 0{,}1$, $\delta_J = 0{,}01$.

бóльшей бассейновой устойчивостью, чем осцилляторы с сильной неидентичностью.

2.1.7. Связь «бассейновой» устойчивости со свойствами активных элементов

Для понимания причин сложного поведения $S_B(J_0)$ на рис. 2.9 совместно построены три зависимости от J_0: бассейновая устойчивость $S_B(J_0)$, среднее число спайков в бёрсте $N_{\text{spb}}(J_0)$ и средняя длительность активной фазы $T_{\text{act}}(J_0)$. Обе последние величины усреднены по времени и по всем осцилляторам сети, т. е. учитывают совместный эффект индивидуальной динамики и сетевого взаимодействия.

Сопоставление обнаруживает следующую закономерность: *локальные максимумы* $T_{\text{act}}(J_0)$ появляются вблизи тех же значений J_0, что и *локальные мак-*

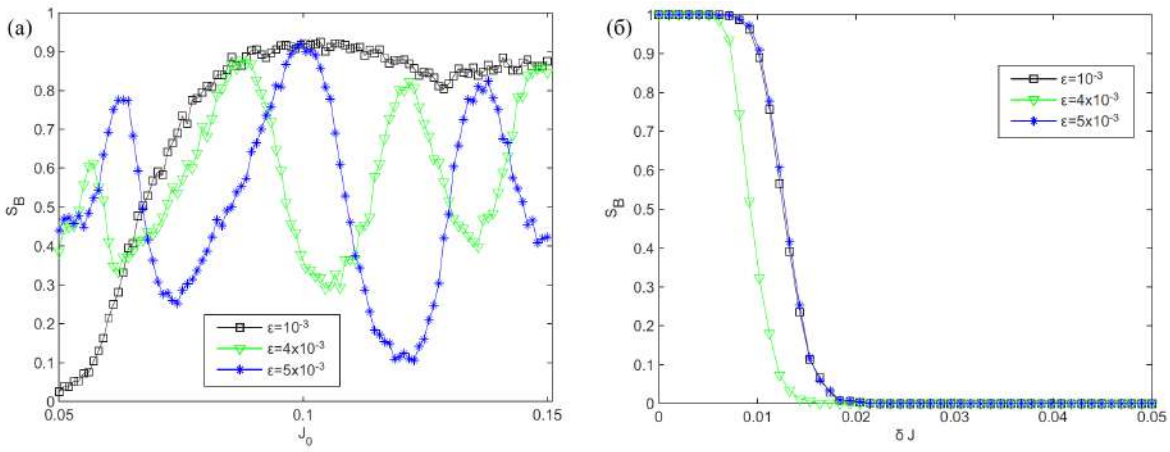

Рис. 2.8 – Бассейновая устойчивость S_B в зависимости от (а) среднего параметра возбудимости J_0 (при $\delta_J = 0{,}01$) и (б) стандартного отклонения δ_J (при $J_0 = 0{,}1$) для различных значений ε ($\varepsilon = 10^{-3}, 4\times10^{-3}, 5\times10^{-3}$). Параметры сети: $N = 50$, $P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $k = 11$, $c = 1$.

симумы $S_B(J_0)$, а при этих J_0 среднее число спайков в бёрсте N_{spb} изменяется *скачкообразно* — кривые $N_{\text{spb}}(J_0)$ имеют ступенчатую форму. Таким образом, локальные увеличения бассейновой устойчивости ассоциированы с удлинением активных фаз бёрстов и одновременно с появлением новых спайков в бёрстах.

Индивидуальная динамика *vs* коллективный эффект. Существенно, что среднее число спайков в бёрсте для *изолированного* осциллятора монотонно возрастает с увеличением J. Однако *наиболее вероятное* число спайков в бёрсте N^*_{spb} индивидуального осциллятора обнаруживает ступенчатую зависимость от J, аналогичную ступенчатости $N_{\text{spb}}(J_0)$ в сети (рис. 2.9в, г). Следовательно, коллективный сетевой эффект состоит, среди прочего, в том, чтобы сделать распределения более симметричными и тем самым трансформировать индивидуальные характеристики изолированного осциллятора в *средние* характеристики сети.

Совместное влияние параметров ε и J_0 на бассейновую устойчивость представлено на рис. 2.10. На плоскости параметров отчётливо видны области высокой и низкой S_B, разделённые границами, коррелирующими с изменением

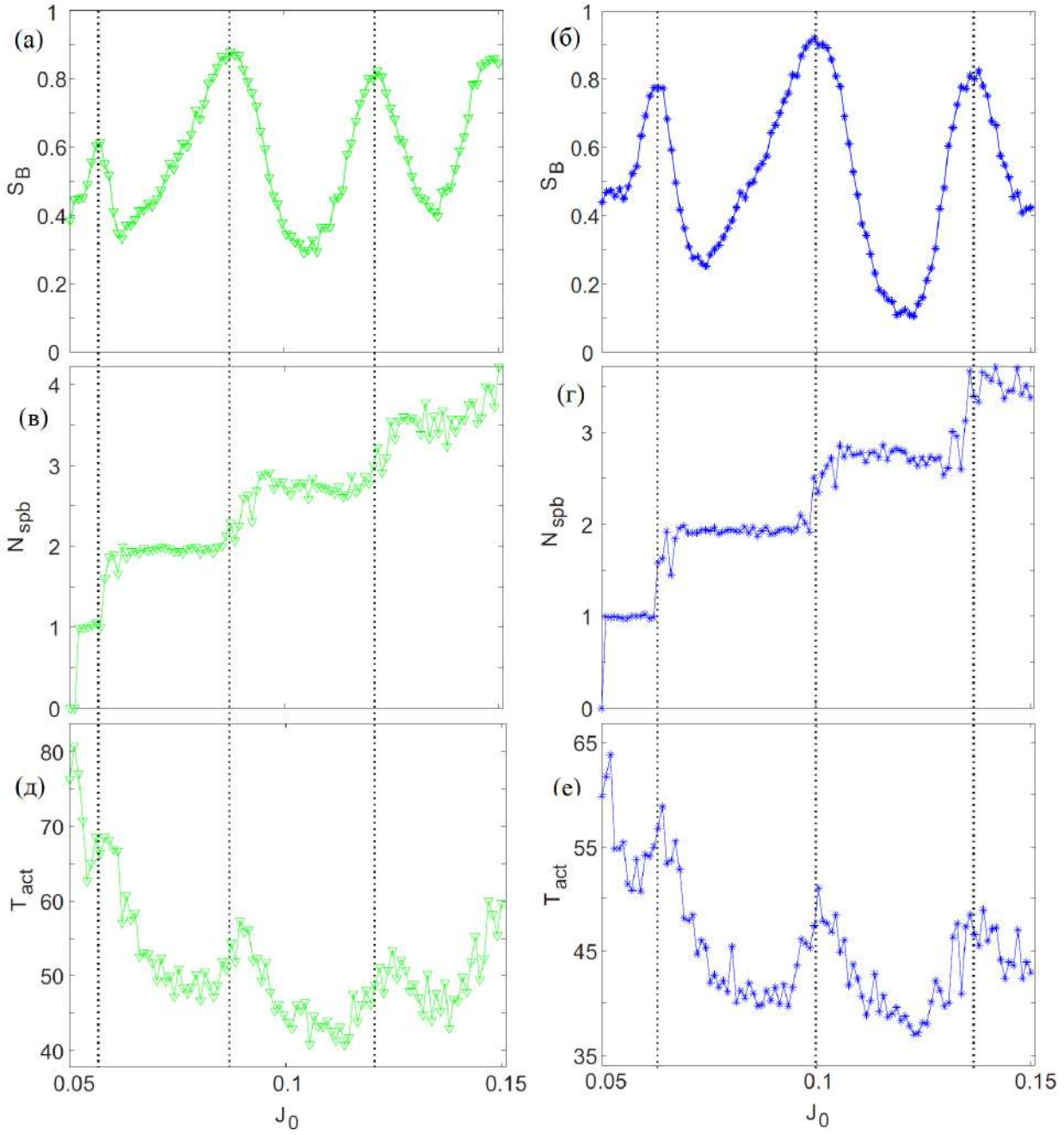

Рис. 2.9 – Совместная зависимость от J_0 для двух значений ε ($\varepsilon = 4 \times 10^{-3}$, левый столбец; $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$, правый столбец): (а, б) бассейновая устойчивость S_B; (в, г) среднее число спайков в бёрсте N_{spb}; (д, е) средняя длительность активной фазы T_{act}. Локальные максимумы S_B и T_{act} расположены при одних и тех же значениях J_0, где N_{spb} изменяется скачкообразно. Параметры: $N = 50$, $P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $k = 11$, $c = 1$, $\delta_J = 0{,}01$.

числа спайков в бёрсте индивидуального осциллятора.

Сплошные кривые на рисунке разделяют плоскость (ε, J_0) на области, в которых изолированный осциллятор с соответствующими параметрами генерирует бёрсты с наиболее вероятным числом спайков N^*_{spb}, указанным на плоскости цифрами от 1 до 10. В целом границы между областями с различными N^*_{spb} совпадают с локальными максимумами S_B, однако при малых ε (в частности, $\varepsilon < 2 \times 10^{-3}$) это соответствие нарушается.

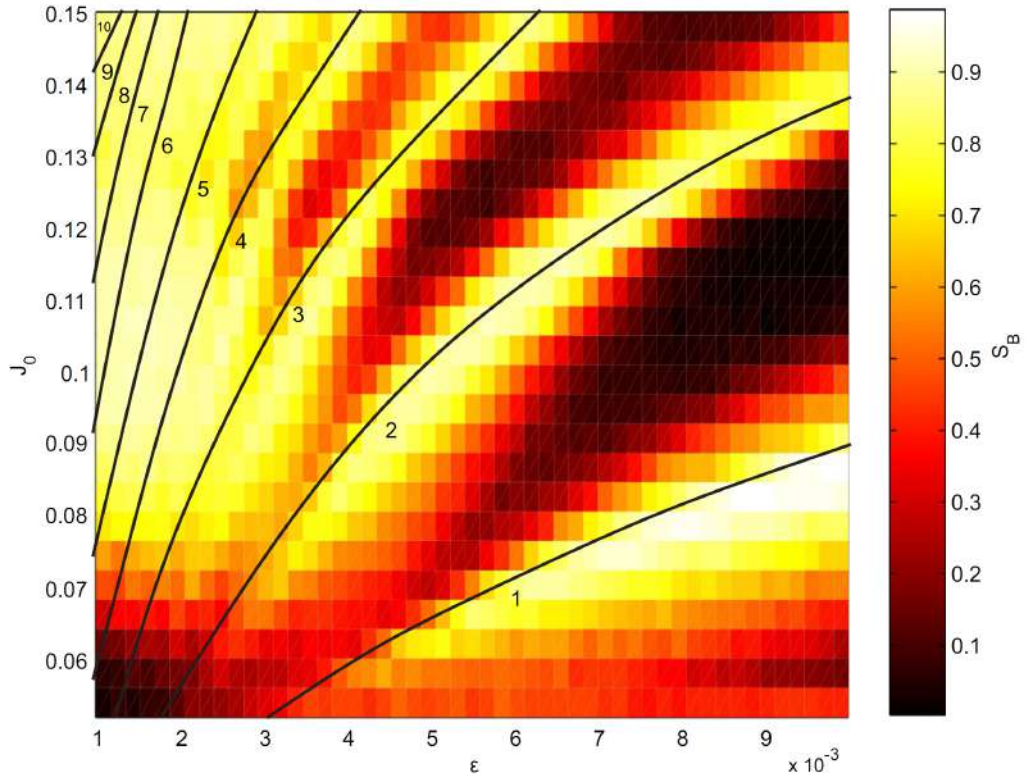

Рис. 2.10 – Бассейновая устойчивость S_B (цветовая шкала) в плоскости параметров (ε, J_0). Сплошные кривые разделяют плоскость на области с различным наиболее вероятным числом спайков в бёрсте N^*_{spb} (цифры 1 – 10). Границы между областями коррелируют с локальными максимумами S_B. Параметры: $N = 50$, $P_{\text{rew}} = 0{,}3$, $k = 11$, $c = 1$, $\delta_J = 0{,}01$.

2.2. Адаптивные сети и гиперсетевое описание метастабильной динамики

В предыдущем разделе архитектура сети рассматривалась как фиксированная структура, а устойчивость коллективного режима характеризовалась свой-

ствами бассейна притяжения в фазовом пространстве системы с неизменной структурой связей. Во многих физических и нейробиологических системах, однако, структура связей может динамически меняться: веса межэлементных взаимодействий изменяются под действием активности узлов, а в ряде случаев перестраивается и сам граф связей [72, 73, 90]. Такие системы называют *адаптивными динамическими сетями*. В адаптивной сети динамика состояний узлов и эволюция структуры связей образуют единый нелинейный процесс, в котором коллективные режимы могут возникать не только как аттракторы системы с фиксированной архитектурой, но и как упорядоченные последовательности переходных состояний.

Настоящий раздел посвящён механизму возникновения воспроизводимой функциональности в адаптивной спайковой сети *в отсутствие заранее заданной целевой функции или процедуры обучения*. Основной результат раздела — введение *гиперсетевого* описания, в рамках которого функциональный режим реализуется как определённый путь по графу метастабильных кластерных состояний, а внешнее воздействие преобразует случайное блуждание по этому графу в детерминированную периодическую траекторию.

2.2.1. Коэволюция состояний и связей

Адаптивная динамическая сеть в наиболее общем виде описывается системой уравнений, объединяющей эволюцию состояний узлов и динамику весов связей:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}(t)\,\mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \qquad \dot{w}_{ij} = F_{ij}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N; w_{ij}, \ldots), \quad (2.12)$$

где $\mathbf{x}_i$ — вектор состояния i-го узла, w_{ij} — вес связи от узла j к узлу i, $\mathbf{f}$ — собственная динамика элемента, $\mathbf{g}$ — форма взаимодействия, F_{ij} — правила адаптации связей.

Принципиальное свойство (2.12): адаптация способна порождать *метастабильные* коллективные режимы — состояния, локально устойчивые на конечных временах, между которыми могут наблюдаться переходы. Переключательная динамика между такими состояниями представляет собой качественно новый тип коллективного поведения, не сводимый к притяжению к единственному аттрактору.

2.2.2. Спайковая сеть с подавляющими связями и событийной перестройкой структуры

Для исследования переключательной динамики рассмотрена минимальная и вместе с тем достаточная для демонстрации всех существенных эффектов модель: сеть из $N = 5$ спайковых осцилляторов с подавляющими направленными связями.

Динамика узлов. Активность i-го узла ($i = 1, \dots, 5$) описывается быстро–медленным отображением [34, 35]:

$$\begin{cases} x_{i,n+1} = x_{i,n} + F_H(x_{i,n}) - y_{i,n} + I_{i,n}, \\ y_{i,n+1} = y_{i,n} + \varepsilon\,(x_{i,n} - J_i), \end{cases} \tag{2.13}$$

где $F_H(x) = x(x-a)(1-x) - \beta\,H(x-d)$ — нелинейная функция с разрывом (та же, что в разделе 1.2 и разделе 2.1). Параметры зафиксированы: $a = 0{,}1$, $\beta = 0{,}3$, $d = 0{,}45$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $J = 0{,}05$. При этих значениях изолированный узел ($I_{i,n} = 0$) находится в подпороговом режиме и генерирует хаотические

бёрсты только в результате подавления (ингибирования) со стороны связанных узлов (постингибиторное восстановление).

Ингибиторная связь. Член взаимодействия имеет вид:

$$I_{i,n} = -g \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} a_{ij,n} \, (x_{i,n} - \nu) \, H(x_{j,n} - \theta), \tag{2.14}$$

где $g > 0$ — сила связи, $a_{ij,n}$ — элементы матрицы смежности $\mathbf{A}_n = \{a_{ij,n}\}$ в момент времени n ($a_{ij,n} = 1$, если узел j посылает связь узлу i, и $a_{ij,n} = 0$ иначе), ν — параметр реверсии (определяет направление тока через синаптический контакт), θ — пороговый параметр. В расчётах: $g = 0{,}15$, $\nu = -0{,}5$, $\theta = 0{,}2$.

В отличие от диффузионной связи (2.3), использованной в разделе 2.1, ингибиторная связь (2.14) *пороговая* (активируется при $x_j > \theta$) и *подавляющая* (при $\nu < 0$ и $x_i > 0$ вклад отрицателен). Это обеспечивает механизм постингибиторного восстановления: осциллятор, освобождённый от ингибирования, генерирует бёрст спайков.

Кластерные состояния. Связи направлены таким образом, что сеть может генерировать трёхшаговый циклический кластер: сначала синхронно активны узлы (i_1, i_2), затем — (i_3, i_4), затем — i_5, после чего цикл повторяется. Для этого элементы матрицы смежности выбираются следующим образом:

$$a_{i_1 i_5} = a_{i_2 i_5} = 1, \quad a_{i_3 i_1} = a_{i_3 i_2} = a_{i_4 i_1} = a_{i_4 i_2} = 1, \quad a_{i_5 i_3} = a_{i_5 i_4} = 1, \tag{2.15}$$

остальные $a_{ij} = 0$. Каждое кластерное состояние обозначается s_k и задаётся тройкой $(i_1, i_2), (i_3, i_4), i_5$. Полное число различных трёхкластерных состояний данной конфигурации равно 30; они перечислены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Список 30 кластерных состояний s_k сети из 5 узлов. Каждый столбец получается циклической перестановкой индексов $(i_1, i_2), (i_3, i_4), i_5$ первого состояния столбца.

$s_1 = (1,2),(3,4),5$	$s_6 = (1,3),(2,4),5$	$s_{11} = (1,4),(2,3),5$
$s_2 = (2,3),(4,5),1$	$s_7 = (2,4),(3,5),1$	$s_{12} = (2,5),(3,4),1$
$s_3 = (3,4),(5,1),2$	$s_8 = (3,5),(4,1),2$	$s_{13} = (3,1),(4,5),2$
$s_4 = (4,5),(1,2),3$	$s_9 = (4,1),(5,2),3$	$s_{14} = (4,2),(5,1),3$
$s_5 = (5,1),(2,3),4$	$s_{10} = (5,2),(3,1),4$	$s_{15} = (5,3),(1,2),4$
$s_{16} = (2,3),(1,4),5$	$s_{21} = (2,4),(1,3),5$	$s_{26} = (3,4),(1,2),5$
$s_{17} = (3,4),(2,5),1$	$s_{22} = (3,5),(2,4),1$	$s_{27} = (4,5),(2,3),1$
$s_{18} = (4,5),(3,1),2$	$s_{23} = (4,1),(3,5),2$	$s_{28} = (5,1),(3,4),2$
$s_{19} = (5,1),(4,2),3$	$s_{24} = (5,2),(4,1),3$	$s_{29} = (1,2),(4,5),3$
$s_{20} = (1,2),(5,3),4$	$s_{25} = (3,1),(5,2),4$	$s_{30} = (2,3),(5,1),4$

Интегральная переменная и момент перестройки. Для определения момента переключения структуры связей вводится вспомогательная переменная q, накапливающая среднюю активность сети:

$$q_{n+1} = q_n + \mu\, X_n, \qquad X_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i,n}, \tag{2.16}$$

с правилом сброса:

$$\text{если } q_n > 1, \quad \text{то } q_n := 0 \text{ и } n^* := n, \tag{2.17}$$

где $0 < \mu \ll 1$ — малый параметр, определяющий скорость накопления (в расчётах $\mu = 0{,}001$).

Величина X_n — среднее поле (среднее арифметическое переменных состояния всех узлов в момент n; здесь и далее под средним полем понимается именно эта величина). Переменная q в среднем возрастает от нуля до порога $q = 1$ со скоростью, определяемой средним полем X_n и параметром μ. Динамика X_n хаотична вследствие хаотической активности x_i, что приводит к малым возмущениям q. При достижении порога значение q сбрасывается в нуль, и в

момент $n = n^*$ происходит перестройка структуры связей.

Правило перестройки структуры связей. В момент $n = n^*$ выбираются два узла: один — из текущего активного кластера, другой — из предыдущего. Индексы k и l этих узлов определяются минимальным расстоянием по циклическому упорядочению узлов. Новая матрица смежности получается перестановкой строк и столбцов:

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{T}_{kl}\,\mathbf{A}_n\,\mathbf{T}_{kl}, \tag{2.18}$$

где $\mathbf{T}_{kl}$ — матрица перестановки, получаемая из единичной 5×5 матрицы обменом строк k и l. Произведение $\mathbf{T}_{kl}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}_{kl}$ означает последовательный обмен строк k, l и затем столбцов k, l матрицы $\mathbf{A}$.

Физический смысл правила (2.18) состоит в следующем: обмен ролями двух узлов (переименование $k \leftrightarrow l$) перенаправляет все входящие и исходящие связи одного узла на другой и наоборот, сохраняя при этом структуру кластерного взаимодействия неизменной. Такая операция моделирует простейший механизм гомеостатической перестройки, при котором «функциональные роли» узлов в кластере обмениваются, но общая схема ингибирования между кластерами сохраняется.

Новая структура связей обладает теми же свойствами симметрии, что и предыдущая: сеть генерирует трёхшаговый циклический кластер, но составленный из *других* узлов — кластеры «перемешиваются» при переключении. Поскольку в каждом цикле три кластера, существуют три различные структуры связей, которые могут быть установлены после переключения; выбор определяется тем, какой кластер активен в момент n^*.

Таким образом, модель представляет собой адаптивную сеть, в которой структура связей определяет форму осцилляторной активности, а динамика ос-

цилляторов влияет на структуру связей, определяя последующую схему взаимодействия после переключения.

2.2.3. Гиперсетевое описание: иерархия уровней и граф переходов

Каждое из 30 кластерных состояний s_k (таблица 2.1) может рассматриваться как *гиперсимплекс* — структурированное множество узлов с явным отношением, существующее на более высоком уровне представления, чем отдельные узлы сети [113, 114].

Вводится иерархическое представление с тремя уровнями (рис. 2.11):

1. **Нижний уровень** (рис. 2.11а) — физическая сеть из $N = 5$ осцилляторов с текущей структурой связей $\mathbf{A}_n$ и микродинамикой (2.13)–(2.14).

2. **Средний уровень** (рис. 2.11б) — множество гиперсимплексов $\{s_1, \dots, s_{30}\}$, каждый из которых определяется конкретным разбиением узлов на кластеры синхронной активности. В каждый момент времени в сети реализован ровно один гиперсимплекс.

3. **Верхний уровень** (рис. 2.11в) — *гиперсеть*: ориентированный граф, узлами которого служат гиперсимплексы, а направленными рёбрами — наблюдаемые переходы между ними, инициируемые событиями перестройки структуры (2.18). Два гиперсимплекса связаны, если сеть может перейти из одного состояния в другое согласно правилам коэволюции (2.16)–(2.18).

Сложность гиперсети и потенциальные переходы в ней определяются динамическими принципами и эволюционными правилами базовой сети. Реальный путь по гиперсети зависит от совместного действия внешних воздействий и внутреннего состояния (рис. 2.11г).

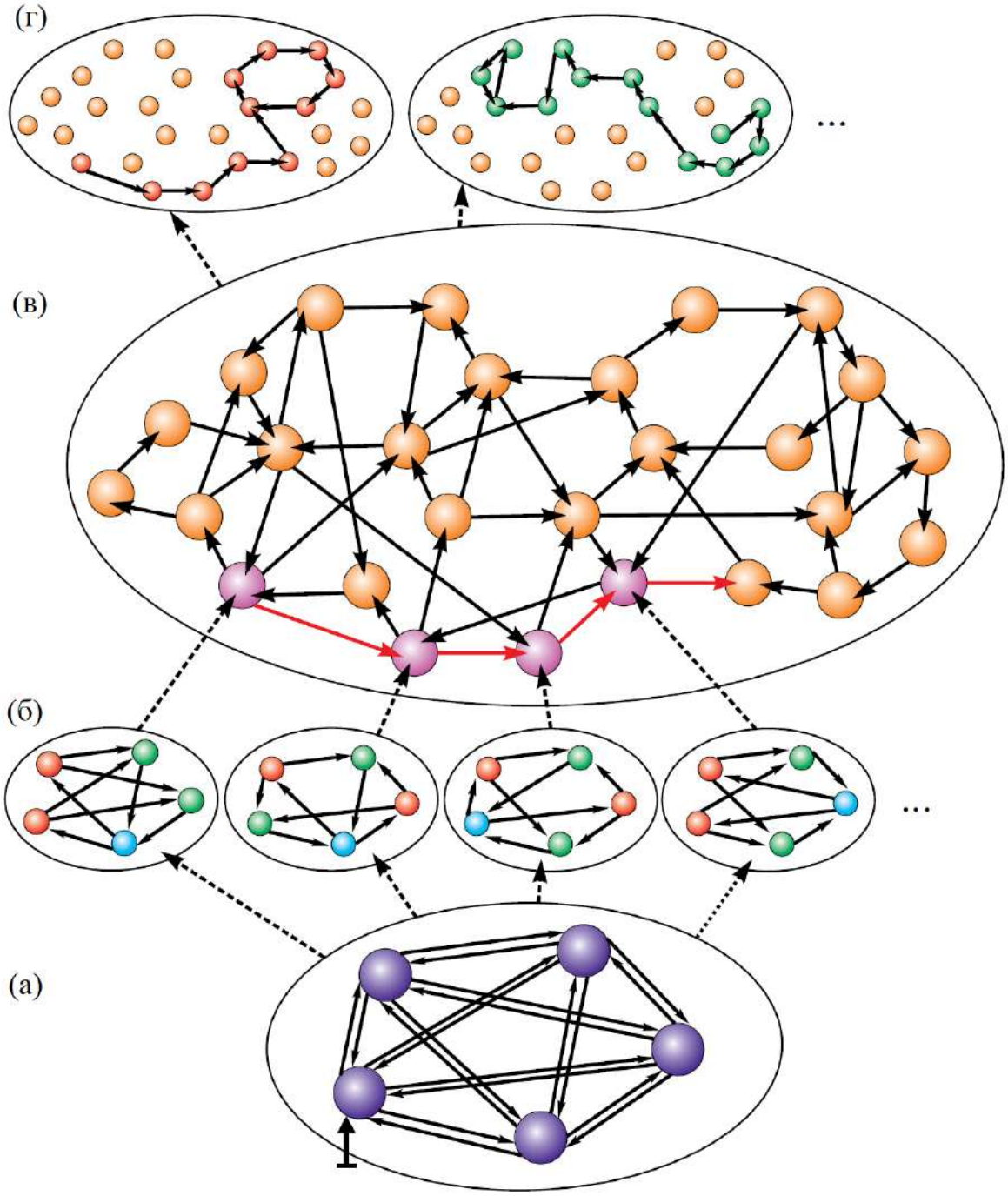

Рис. 2.11 – Иерархическая структура гиперсетевого описания: (а) физическая сеть осцилляторов с текущей структурой связей; (б) множество гиперсимплексов — метастабильных кластерных состояний, возникающих последовательно в ходе коэволюции структуры и динамики; (в) гиперсеть — ориентированный граф переходов между гиперсимплексами; (г) различные пути по гиперсети, индуцируемые различными внешними стимулами (вертикальная стрелка), приходящими на нижний уровень.

2.2.4. Автономный режим: случайное блуждание

В отсутствие внешнего воздействия система генерирует последовательность различных кластерных состояний, и путь в соответствующей гиперсети представляет собой *случайное блуждание* (рис. 2.12а, б).

Источник нерегулярности — высокая чувствительность к микросостояниям системы в момент порогового события n^*: малые различия в мгновенных значениях быстрых переменных x_i или медленных переменных y_i в момент сброса q приводят к выбору различных ветвей дальнейшей эволюции. Хаотическая природа динамики узлов обеспечивает робастность переключательной активности даже в присутствии нерегулярных флуктуаций.

2.2.5. Детерминация траекторий внешним воздействием

Основной результат работы состоит в обнаружении качественной смены поведения при введении *постоянного* внешнего воздействия на один из узлов сети.

Приложение постоянного стимула к узлу сети определяет подмножество *активных* направленных рёбер в гиперсети; остальные рёбра становятся неактивными. В результирующей *редуцированной гиперсети* каждый гиперсимплекс имеет *ровно одну* исходящую связь, и путь становится полностью детерминированным. Существует предельный путь — *цикл длины шесть*, притягивающий все прочие траектории.

Пример 1: стимул на узел 1. Пусть сеть в начальный момент находится в состоянии s_1 и постоянный вход приложен к узлу 1. Траектория в гиперсети проходит через последовательность $s_1 \to s_{28} \to s_{12} \to s_{24}$ и выходит на цикл длины шесть: $s_{14}, s_9, s_{17}, s_3, s_{23}, s_7$ (рис. 2.12в, г).

Пример 2: стимул на узел 2. При начальном состоянии s_{11} и стимуле на узел 2 траектория проходит $s_{11} \to s_6 \to s_1 \to s_{28} \to s_{19} \to s_9$ и выходит на *другой* цикл длины шесть: $s_4, s_{24}, s_8, s_{15}, s_{10}, s_{18}$ (рис. 2.12д, е).

Таким образом, различные стимулы порождают различные стимул-специфичные периодические последовательности. В общем случае путь в гиперсети зависит от внутреннего состояния сети (текущей структуры связей) и внешнего стимула (к какому узлу он приложен).

Механизм детерминации. Прикладывание стимула к узлу нарушает симметрию сети, фиксируя один из возможных вариантов перестройки структуры (2.18) в каждом кластерном состоянии. Это приводит к тому, что в редуцированной гиперсети каждый гиперсимплекс имеет ровно одну исходящую связь — все траектории сходятся к общему предельному циклу. Данное свойство аналогично динамике систем с принципом «конкуренции без победителя» [104—106], однако *динамический механизм* коэволюции структуры и динамики принципиально отличается от устойчивого гетероклинического канала в указанных работах: в гиперсетевой модели метастабильность кластерных состояний обусловлена не седловыми равновесиями непрерывной системы, а событийной перестройкой дискретной структуры связей.

2.2.6. Аппаратная реализация на ПЛИС

Системы (2.13)–(2.14) и эволюционные правила (2.16)–(2.18) реализованы на ПЛИС Xilinx Artix-7. Сигнал от каждого осциллятора сети и сигнал, соответствующий интегральной переменной q, регистрировались через 12-битные цифро-аналоговые преобразователи многоканальной системой сбора данных.

Временны́е масштабы аппаратной реализации соответствуют характер-

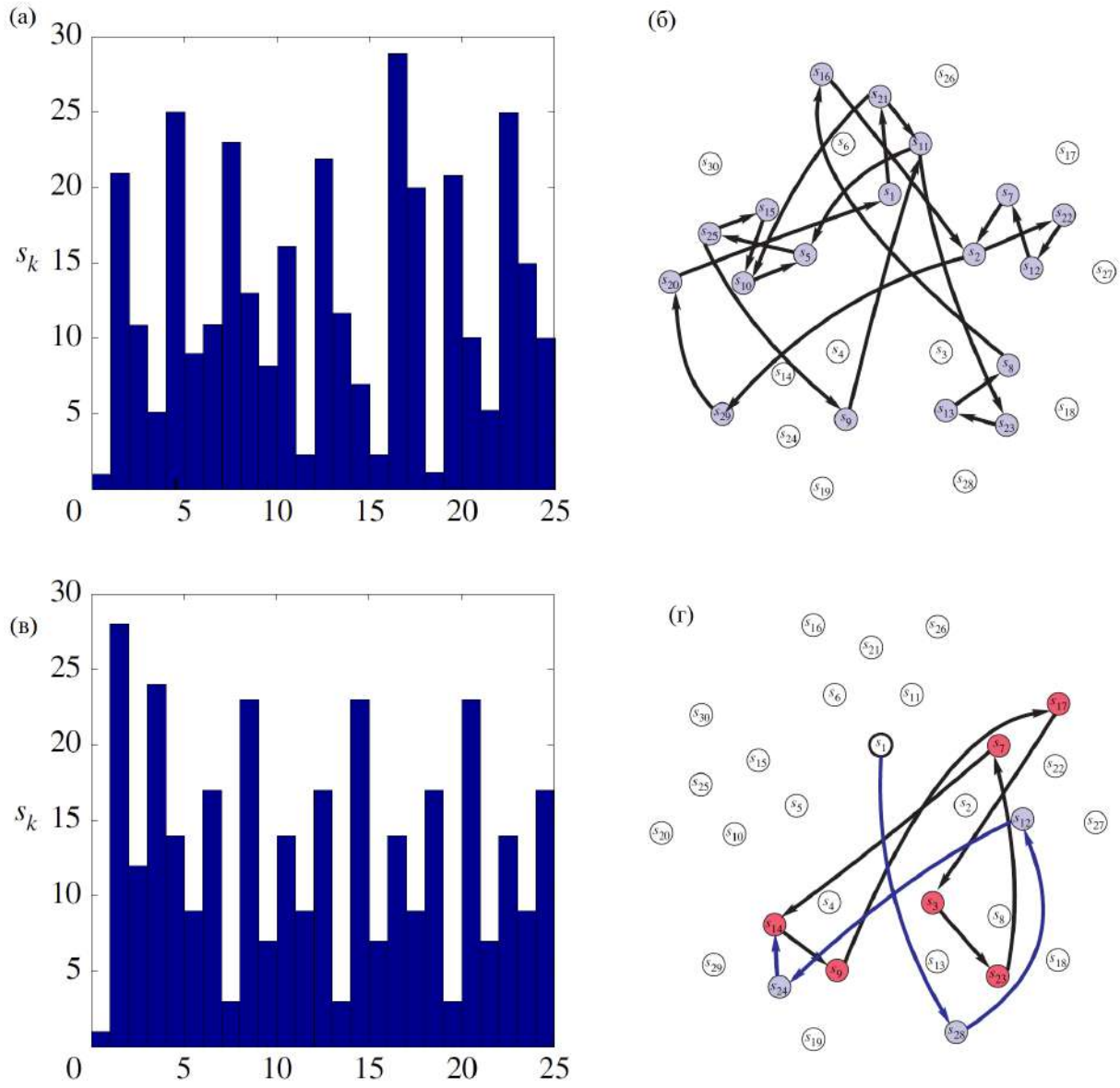

Рис. 2.12 – Последовательности кластерных состояний $\{s_k\}$ (а, в, д) и соответствующие пути в гиперсети (б, г, е): (а, б) автономный случай — случайное блуждание; (в, г) стимул приложен к узлу 1, начальное состояние s_1 — после 4 шагов траектория выходит на цикл длины шесть $s_{14}, s_9, s_{17}, s_3, s_{23}, s_7$ (выделен цветом); (д, е) стимул приложен к узлу 2, начальное состояние s_{11} — после 6 шагов траектория выходит на цикл длины шесть $s_4, s_{24}, s_8, s_{15}, s_{10}, s_{18}$.

ным масштабам реальных нейронов: один дискретный шаг — 50 мкс, средняя длительность спайка — 10–20 шагов ($\approx$ 0,5–1 мс), бёрст длится $\approx$ 25 мс. Параметры аппаратной модели: $\mu = 0{,}001$, $\varepsilon = 0{,}001$, $J = 0{,}05$, $\beta = 0{,}3$, $a = 0{,}1$, $d = 0{,}45$, $\theta = 0{,}2$, $\nu = -0{,}5$, $g = 0{,}07$.

Экспериментальные результаты показаны на рис. 2.13. В автономном режиме (рис. 2.13а) наблюдаются случайные переходы между различными кластерными состояниями, полностью согласующиеся с теоретическим предсказанием случайного блуждания по гиперсети (раздел 2.2.4). При приложении постоянного входа к узлу 1 (рис. 2.13б) сеть демонстрирует переходы, соответствующие редуцированной гиперсети, и выходит на цикл длины шесть: s_{23}, s_7, s_{14}, s_9, s_{17}, s_3, s_{23}, ...

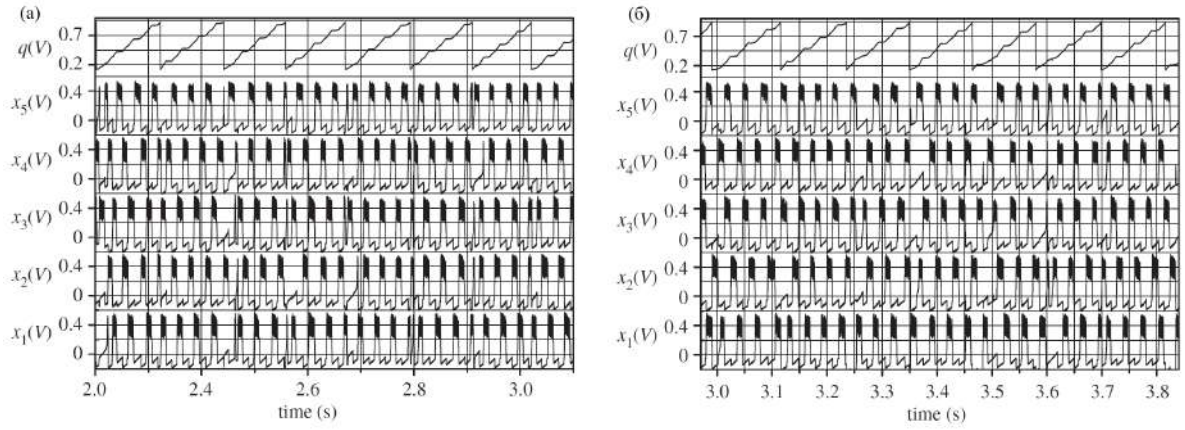

Рис. 2.13 – Результаты аппаратной реализации адаптивной сети на ПЛИС Xilinx Artix-7. Показаны экспериментальные осциллограммы интегральной переменной q (В) и переменных состояния x_i (В), $i = 1, \ldots, 5$: (а) автономный режим — нерегулярные переходы между кластерными состояниями (случайное блуждание по гиперсети); (б) стимул приложен к узлу 1 — детерминированный периодический цикл $s_{23}, s_7, s_{14}, s_9, s_{17}, s_3$. Пилообразная форма $q(t)$ отражает накопление средней активности (2.16) и сброс при достижении порога (2.17).

Аппаратная реализация на ПЛИС подтвердила устойчивость механизма формирования стимул-специфичных циклов и воспроизводимость детерминированных последовательностей кластерных состояний при повторных экспериментах. Дискретная природа модели (2.13)–(2.14) (отображение с целочислен-

ным временем и пороговыми нелинейностями) делает её непосредственно пригодной для реализации в цифровой логике без аппроксимации непрерывных дифференциальных уравнений. Принципиальное отличие ПЛИС-реализации от моделирования на ЦПУ или ГПУ состоит не в вычислительном ускорении (для сети из пяти узлов выигрыш в быстродействии несущественен), а в параллельности исполнения и жёсткой детерминированности временны́х интервалов: все узлы обновляются одновременно за один такт синхросигнала, а событие перестройки структуры (2.18) обрабатывается в фиксированное число тактов, что исключает программные задержки и джиттер планировщика, неизбежные при последовательном исполнении на процессоре общего назначения. Тем самым аппаратная реализация обеспечивает условия, при которых гиперсетевое описание может быть верифицировано в режиме реального времени: теоретически предсказанные последовательности кластерных состояний непосредственно сопоставляются с экспериментально наблюдаемыми осциллограммами без дополнительной постобработки.

2.3. Иерархические переходы, перенос доменной структуры и пространственный хаос в сетях осцилляторов

В предыдущем разделе было показано, что коэволюция динамики узлов и структуры связей способна порождать функциональные последовательности переходов между метастабильными состояниями. Настоящий раздел посвящён другому классу коллективных явлений, характерному для больших ансамблей осцилляторных элементов: *иерархическим переходам* (т. е. последовательным перестройкам коллективной динамики, при которых элементы вовлекаются в новый режим поочерёдно, в порядке, определяемом их индивидуальными параметрами), *пространственному разделению динамических режимов* и *про-*

странственному хаосу в распределении амплитуд.

Раздел содержит три группы результатов. Во-первых, исследуется влияние корреляций между структурными и динамическими характеристиками узлов на коллективную динамику неоднородных сетей осцилляторов Стюарта–Ландау. Во-вторых, обнаружено явление двухстадийного переноса доменной структуры в мультиплексных адаптивных сетях и исследован его механизм: сложный пространственный паттерн, возникающий в неоднородном адаптивном слое, переносится на изначально однородный неадаптивный слой. В-третьих, в кольцах и цепочках бистабильных осцилляторов Баутина обнаружено явление неупорядоченного подавления колебаний и аналитически исследован его механизм, связанный с формированием подковы Смейла в пространстве амплитуд.

2.3.1. Неоднородные сети осцилляторов Стюарта–Ландау с корреляцией «структура–динамика»

Модель и структура сети Рассматривается невзвешенная ненаправленная сеть из N осцилляторов Стюарта–Ландау, связанных по вещественным частям:

$$\dot{x}_j = P_j\, x_j - \omega_j\, y_j + K \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\,(x_k - x_j), \qquad \dot{y}_j = P_j\, y_j + \omega_j\, x_j, \quad (2.19)$$

где $P_j = \lambda_j - x_j^2 - y_j^2$, $j = 1, \ldots, N$, $K \in \mathbb{R}$ — глобальная сила связи, $\mathbf{A} = \{A_{jk}\}$ — симметричная матрица смежности ($A_{jk} = A_{kj} = 1$, если узлы j и k связаны, и $A_{jk} = 0$ иначе).

Для построения структуры связей используется алгоритм [137], позволяющий получить однопараметрическое семейство конфигураций от случайных графов Эрдёша–Реньи до безмасштабных сетей Барабаши–Альберт. Сеть строится как растущий граф, в котором на каждом шаге добавляется новый узел со

связями, создаваемыми с вероятностью η согласно равномерному распределению либо с вероятностью $(1-\eta)$ по правилу предпочтительного присоединения [86]. При $\eta = 1$ получается сеть Эрдёша–Реньи с пуассоновским распределением степеней; при $\eta = 0$ — сеть Барабаши–Альберт со степенным распределением $P(k) \sim k^{-3}$; промежуточные значения $\eta \in (0, 1)$ дают переходные случаи.

Осцилляторы упорядочены по убыванию степени: чем больше соседей имеет осциллятор, тем меньше его индекс j. Описываемые ниже коллективные явления наблюдаются во всём диапазоне $\eta \in (0, 1)$, однако наиболее выраженными они являются при $\eta = 0$ (безмасштабные сети) вследствие наибольшего разброса степеней узлов. Все результаты приводятся для $\eta = 0$.

Исследуются два типа корреляции между структурой сети и динамикой узлов:

- **Корреляция «степень–частота»:** $\omega_j = k_j$, $\lambda_j = \lambda_0 = 1$ для всех $j = 1, \ldots, N$. Все осцилляторы имеют одинаковую собственную амплитуду $\sqrt{\lambda_0} = 1$, но различные частоты, распределённые по степенному закону согласно структуре сети.

- **Корреляция «степень–амплитуда»:** $\lambda_j = k_j$, $\omega_j = \omega_0 = 2$ для всех j. Все осцилляторы имеют одинаковую частоту, но различные собственные амплитуды $\sqrt{k_j}$.

Иерархическое подавление при корреляции «степень–частота» В режиме без связей ($K = 0$) наблюдаются периодические колебания с одинаковой амплитудой $\sqrt{\lambda_0} = 1$ и различными частотами (рис. 2.14а). При увеличении силы связи выше критического значения возникает *эмерджентный* (т. е. не присущий отдельным элементам, а возникающий только в результате их коллектив-

ного взаимодействия) эффект: часть осцилляторов с наибольшими степенями (индексы $j = 1, \dots, 70$) оказывается почти подавленной, тогда как остальные ($j = 130, \dots, 200$) сохраняют колебания (рис. 2.14б, $K = 0{,}5$). В промежуточной области ($j = 71, \dots, 129$) наблюдается пространственный беспорядок, где некоторые осцилляторы почти подавлены, а другие колеблются с различными амплитудами.

Высокостепенные осцилляторы продолжают совершать колебания с весьма малыми амплитудами вокруг начала координат (рис. 2.14в, г, $j = 1$). Низкостепенные демонстрируют колебания со значительными амплитудами ($j = 200$), однако их амплитуды меньше значения $\sqrt{\lambda_0} = 1$, характерного для автономного осциллятора. Осцилляторы со средними степенями ($j = 100$) могут иметь промежуточные амплитуды.

Количественная характеристика. Амплитуда колебаний характеризуется средним радиусом

$$\langle r_j \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left[x_j^2(t) + y_j^2(t) \right]^{1/2} dt, \tag{2.20}$$

а средняя частота —

$$\langle \omega_j \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{\phi}_j(t)\, dt, \qquad \tau \gg 1, \quad \phi_j = \mathrm{Arg}(z_j). \tag{2.21}$$

Зависимости $\langle r_j \rangle$ и $\langle \omega_j \rangle$ от K представлены на рис. 2.15. Процесс подавления является иерархическим: амплитуды высокочастотных осцилляторов $j = 1, 2, 3$ ($\omega_j > 5$) резко падают при $K \approx 0{,}07$, формируя группу почти подавленных элементов. С увеличением K осцилляторы с высокими частотами постепенно переходят в эту группу ($\langle r_j \rangle \approx 0$), тогда как амплитуды остальных уменьшаются (рис. 2.15б). Осцилляторы с подавленными амплитудами продол-

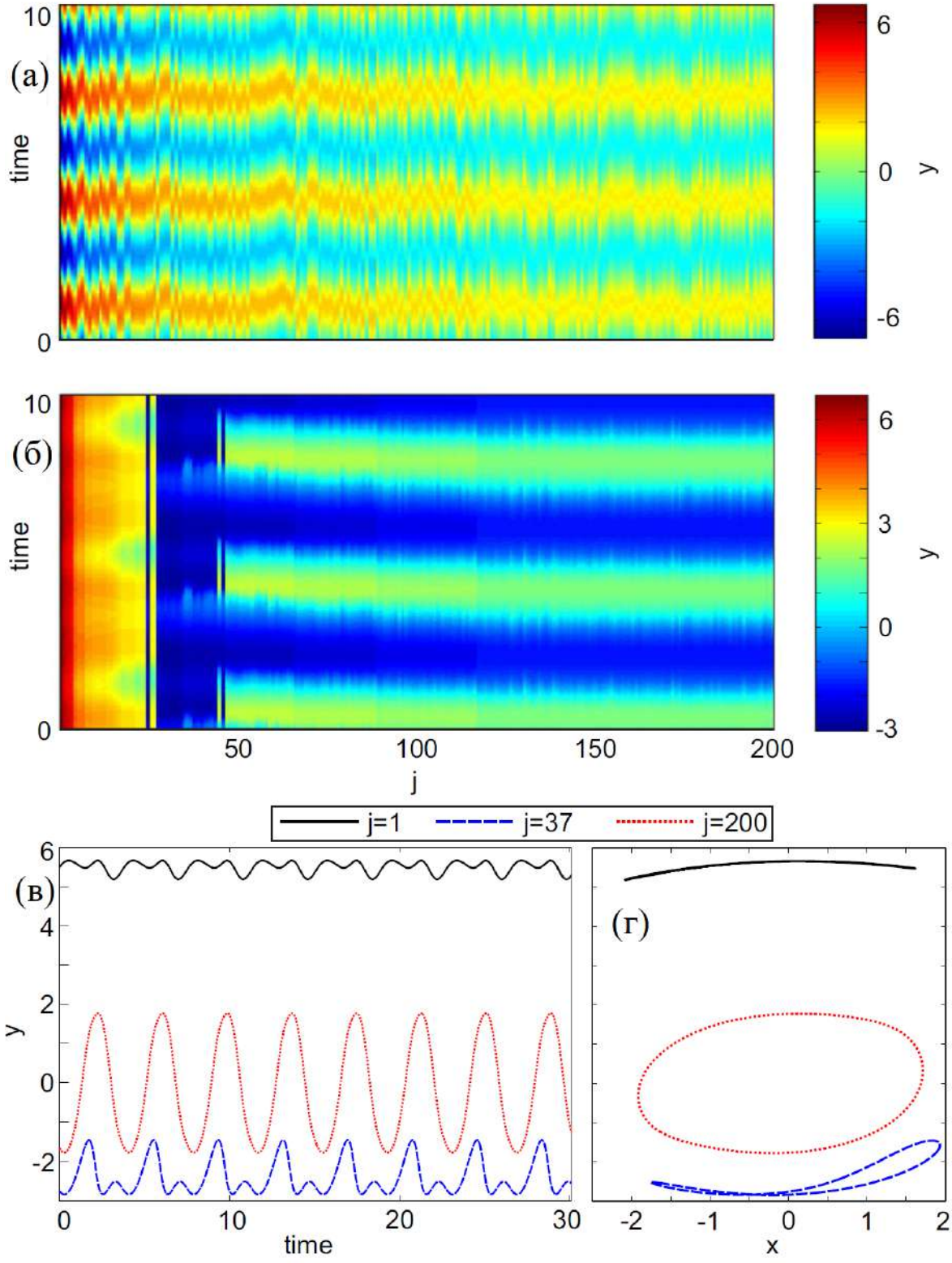

Рис. 2.14 – Безмасштабная сеть с корреляцией «степень–частота» ($\omega_j = k_j$, $\lambda_j = 1$, $N = 200$). Пространственно-временны́е диаграммы $y_j(t)$: (а) $K = 0$; (б) $K = 0{,}5$. Осцилляторы упорядочены от высокочастотных к низкочастотным. (в) Волновые формы $y_j(t)$ для $j = 1, 100, 200$ при $K = 0{,}5$. (г) Соответствующие фазовые портреты (x_j, y_j).

жают колебаться с ненулевыми частотами, однако их $\langle\omega_j\rangle$ значительно меньше собственных ω_j (рис. 2.15в).

При $K = 0{,}5$ наблюдается отчётливое разделение на три *домена* (здесь и далее под доменом понимается пространственно связная группа осцилляторов, находящихся в качественно одинаковом динамическом режиме): первый с $\langle r_j\rangle \approx 0$ (подавленные), второй с пространственным беспорядком ($\langle r_j\rangle \in (0; 0{,}7)$), третий с $\langle r_j\rangle \approx 0{,}5$ (осциллирующие). В диапазоне $K = 0{,}3 \div 0{,}8$ средние частоты всех осцилляторов приблизительно равны собственным частотам низкочастотных элементов. При $K > 0{,}8$ колебательная активность всей сети подавляется.

Доменное разделение при корреляции «степень–амплитуда» В сетях с $\lambda_j = k_j$ и $\omega_j = \omega_0 = 2$ в несвязанном режиме наблюдаются колебания с различными амплитудами $\sqrt{k_j}$: высокостепенные осцилляторы имеют бóльшие амплитуды (рис. 2.16а). При $K = 5$ (рис. 2.16б) формируются три домена: (i) почти подавленные осцилляторы $j = 1, \ldots, 30$ с высоким положительным средним значением y; (ii) почти подавленные $j = 31, \ldots, 47$ с отрицательным средним; (iii) колеблющиеся $j = 48, \ldots, 200$.

Все осцилляторы совершают колебания с одной и той же базовой частотой, однако их индивидуальное поведение различается: осциллятор $j = 200$ третьего домена демонстрирует квазисинусоидальные колебания вокруг начала координат, тогда как в проекции на парциальные фазовые плоскости отдельных осцилляторов первого ($j = 1$) и второго ($j = 37$) доменов наблюдаются замкнутые кривые, сильно сжатые в направлении y (рис. 2.16в, г). Диапазон x-колебаний для всех узлов находится в интервале $-2 < x < 2$ и *не зависит* от увеличения силы связи. Таким образом, конфигурация с корреляцией «степень–

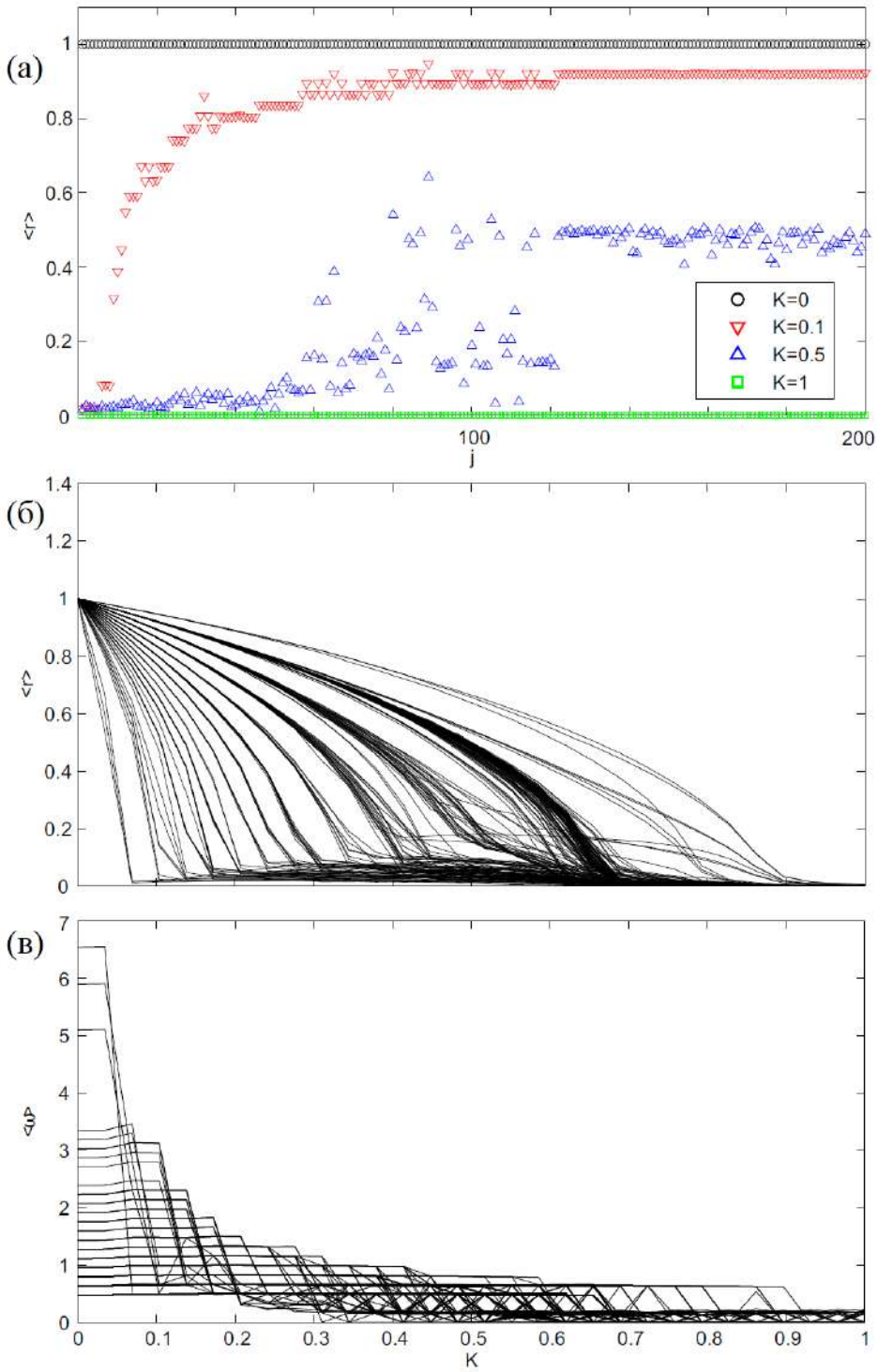

Рис. 2.15 – Иерархическое подавление в безмасштабной сети ($N = 200$) с корреляцией «степень–частота» ($\omega_j = k_j$, $\lambda_0 = 1$): (а) средние радиусы $\langle r_j \rangle$ при $K = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}5;\ 1$; (б) $\langle r_j \rangle$ в зависимости от K; (в) средние частоты $\langle \omega_j \rangle$ в зависимости от K.

амплитуда» оказывает основное воздействие на y-динамику, разделяя элементы на различные домены.

Иерархический процесс. Для количественной характеристики вводится величина, называемая далее *центром масс* y-колебаний (среднее по времени положение траектории вдоль оси y):

$$y_{c.m.} = \frac{1}{T}\int_0^T y_j(t)\,dt. \tag{2.22}$$

Зависимости $y_{c.m.}$ и среднего радиуса $\langle r_j \rangle$ от K представлены на рис. 2.17. При $K \approx 0{,}3$ высокоамплитудные осцилляторы формируют первый домен со сжатыми проекциями на парциальные фазовые плоскости ($y_{c.m.} \approx 6$). При $K \approx 0{,}5$ появляется второй домен ($y_{c.m.} \approx -3$). Третий домен (осцилляторы с наименьшими λ_j) существует во всём диапазоне K, но постепенно сужается, отдавая узлы с бóльшими λ_j первому и второму доменам.

Начиная с $K = 0{,}5$ первый домен растёт за счёт осцилляторов, приходящих *из второго*: высокостепенной осциллятор сначала переходит во второй домен, а затем при бóльшем K — в первый. Первый домен расширяется с увеличением K, а второй остаётся узким, поглощая осцилляторы из третьего домена и позднее отдавая их первому.

Различие между типами корреляций. Существенное отличие двух конфигураций состоит в том, что при корреляции «степень–частота» процессы подавления затрагивают *обе* вещественные переменные осцилляторов (x и y), тогда как при корреляции «степень–амплитуда» они относятся преимущественно к y-динамике.

Корреляции между структурными и динамическими характеристиками уз-

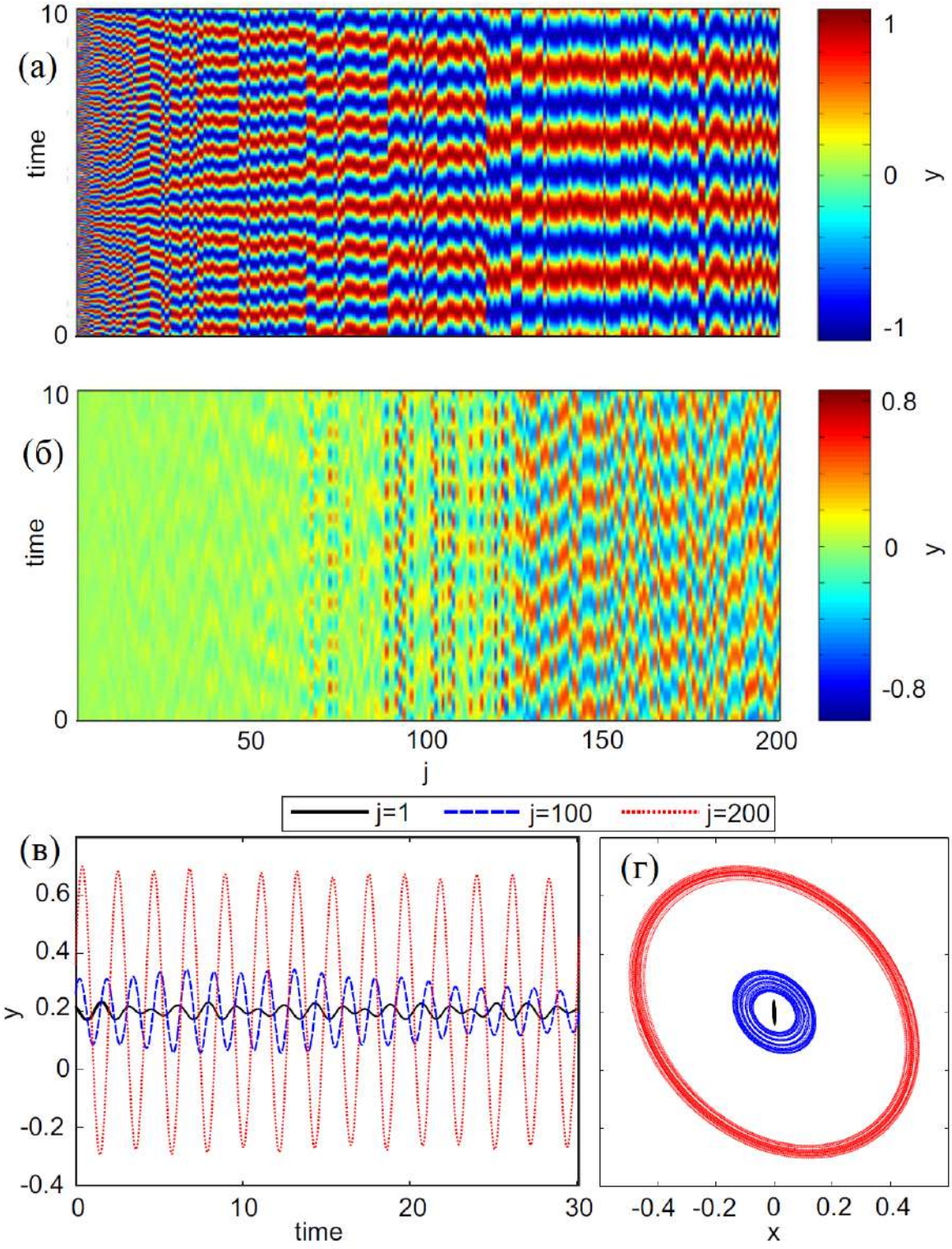

Рис. 2.16 – Безмасштабная сеть с корреляцией «степень–амплитуда» ($\lambda_j = k_j$, $\omega_0 = 2$, $N = 200$). Пространственно-временны́е диаграммы $y_j(t)$: (а) $K = 0$; (б) $K = 5$. Осцилляторы упорядочены от высокоамплитудных к низкоамплитудным. (в) Осциллограммы $y_j(t)$ для $j = 1, 37, 200$ при $K = 5$. (г) Соответствующие фазовые портреты (x_j, y_j).

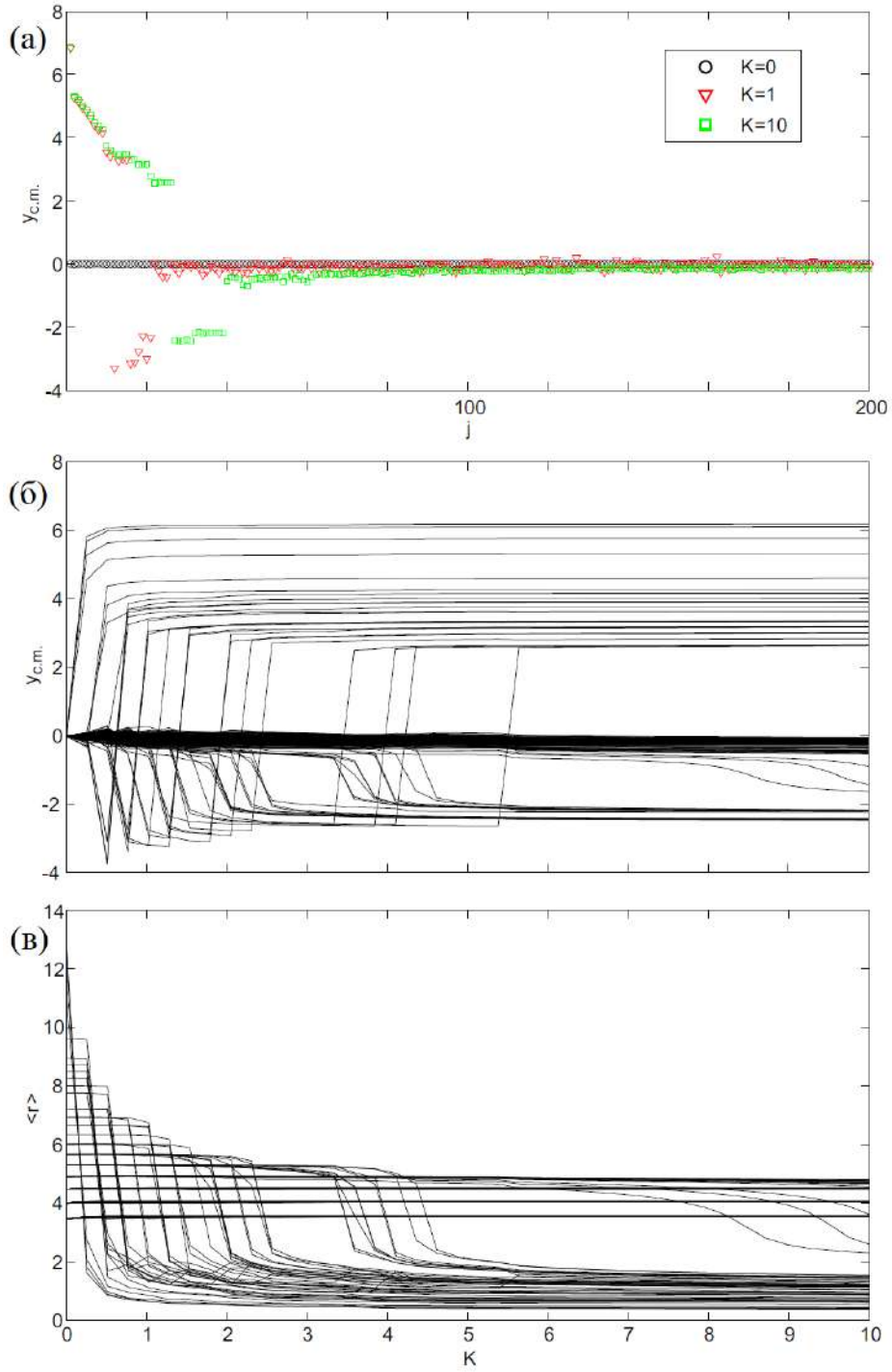

Рис. 2.17 – Доменное разделение при корреляции «степень–амплитуда» ($\lambda_j = k_j, \omega_0 = 2, N = 200$): (а) $y_{c.m.}$ при $K = 0;\ 1;\ 10$; (б) $y_{c.m.}$ в зависимости от K; (в) $\langle r_j \rangle$ в зависимости от K.

лов определяют порядок иерархического подавления при увеличении K: при корреляции «степень–частота» первыми подавляются высокочастотные (высокостепенные) узлы; при корреляции «степень–амплитуда» — высокоамплитудные. Корреляции также определяют формирование устойчивых доменов и механизмы перехода элементов между ними.

2.3.2. Мультиплексная адаптивная сеть: иерархическое подавление

Следующий шаг — исследование переноса доменной структуры между слоями мультиплексной сети. В качестве элементарного осциллятора используется осциллятор Стюарта–Ландау.

Архитектура мультиплексной сети Рассматривается двухслойная мультиплексная сеть из $2N$ осцилляторов ($N = 100$). Полная динамика задаётся системой:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1j} &= (\lambda_{1j} - r_{1j}^2)\, x_{1j} - \omega_0\, y_{1j} + K_1 \sum_{k=1}^{N} w_{jk}(t)\,(x_{1k} - x_{1j}) + C\, q_j(t)\,(x_{2j} - x_{1j}),\\
\dot{y}_{1j} &= (\lambda_{1j} - r_{1j}^2)\, y_{1j} + \omega_0\, x_{1j},\\
\dot{x}_{2j} &= (\lambda_0 - r_{2j}^2)\, x_{2j} - \omega_0\, y_{2j} + K_2 \sum_{k=1}^{N} (x_{2k} - x_{2j}) + C\, q_j(t)\,(x_{1j} - x_{2j}),\\
\dot{y}_{2j} &= (\lambda_0 - r_{2j}^2)\, y_{2j} + \omega_0\, x_{2j},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где $r_{lj}^2 = x_{lj}^2 + y_{lj}^2$, $j = 1, \ldots, N$, K_1, $K_2 \in \mathbb{R}$ — силы внутрислоевых связей, C — сила межслоевого взаимодействия.

Структура двух слоёв принципиально различна.

Слой 1 (адаптивный, неоднородный). Все осцилляторы имеют одинаковую собственную частоту $\omega_{1j} = \omega_0 = 3$, но различные параметры λ_{1j}, равномерно распределённые в интервале $(0, 100)$. Собственные амплитуды $\sqrt{\lambda_{1j}} \in (0, 10)$.

Элементы упорядочены по убыванию λ_{1j}: чем меньше индекс j, тем больше собственная амплитуда. Матрица внутрислоевых весов $\mathbf{W}(t) = [w_{jk}(t)]$ эволюционирует по адаптивному правилу:

$$w_{jk}(t) = \left| r_{1j}^2(t) - r_{1k}^2(t) \right|. \tag{2.24}$$

Вследствие адаптивной природы связей, взаимодействие между некоторыми элементами может быть усилено, тогда как между другими — ослаблено до нуля.

Слой 2 (неадаптивный, однородный). Все осцилляторы идентичны: $\lambda_{2j} = \lambda_0 = 1, \omega_{2j} = \omega_0 = 3$ для всех j. Связи постоянны, структура «все-со-всеми» с силой K_2. В расчётах $K_2 = K_1$.

Межслоевые связи. Организованы по мультиплексному принципу «один-к-одному»: j-й узел первого слоя связан с j-м узлом второго. Межслоевые веса также адаптивны:

$$q_j(t) = \left| r_{1j}^2(t) - r_{2j}^2(t) \right|. \tag{2.25}$$

Правила (2.24) и (2.25) представляют собой обобщённую форму *антихеббовской пластичности*, наблюдаемой в ряде нейронных структур [138—140]: связь усиливается, если радиусы колебаний $r_j^2 = x_j^2 + y_j^2$ связанных осцилляторов различаются, и ослабевает при их сближении.

Однослойная динамика ($C = 0$): формирование доменов. Изолированная однослойная сеть ($C = 0$) с адаптивными связями и гетерогенным распределением λ_j демонстрирует иерархические переходы при увеличении внутрислоевой связи K.

При $K = 0$ наблюдаются колебания с одинаковой частотой ω_0 и ампли-

тудами в интервале $(0, 10)$, определяемыми как $\sqrt{\lambda_j}$ (рис. 2.18а).

При $K = 0{,}01$ (рис. 2.18б) формируются *три отчётливых домена*:

(i) Почти подавленные осцилляторы $j = 1, \ldots, 27$ с *положительными* средними y_j — узлы с наибольшими собственными амплитудами.

(ii) Почти подавленные осцилляторы $j = 28, \ldots, 57$ с *отрицательными* средними y_j — узлы со вторыми по величине собственными амплитудами.

(iii) Осциллирующие элементы $j = 58, \ldots, 100$ — узлы с наименьшими λ_j, сохраняющие колебания с достаточно большими амплитудами вблизи нуля.

Взаимодействие преимущественно происходит между осцилляторами *различных* доменов, что видно из снимка адаптивной матрицы весов $\mathbf{W}(t)$ (рис. 2.19): яркие области (сильные связи) расположены на пересечениях строк и столбцов, принадлежащих различным доменам, тогда как связи внутри одного домена практически нулевые.

При $K = 0{,}1$ (рис. 2.18в) третий домен исчезает; все осцилляторы переходят в почти подавленное состояние, формируя два домена с положительным и отрицательным средними y.

Интерпретация в терминах динамических систем. Адаптивно связанная сеть генерирует N-мерный тор в фазовом пространстве. В несвязанном и слабосвязанном режимах этот тор имеет простые круговые проекции на парциальные фазовые плоскости отдельных осцилляторов (рис. 2.18г). По мере увеличения связи тор постепенно деформируется: в проекции на парциальные фазовые плоскости элементов первого и второго доменов наблюдаются замкнутые кривые, сильно сжатые в направлении y (рис. 2.18д), что соответствует их почти

подавленному поведению. При дальнейшем увеличении K тор сжимается, и все осцилляторы коллапсируют в неподвижную точку (рис. 2.18е).

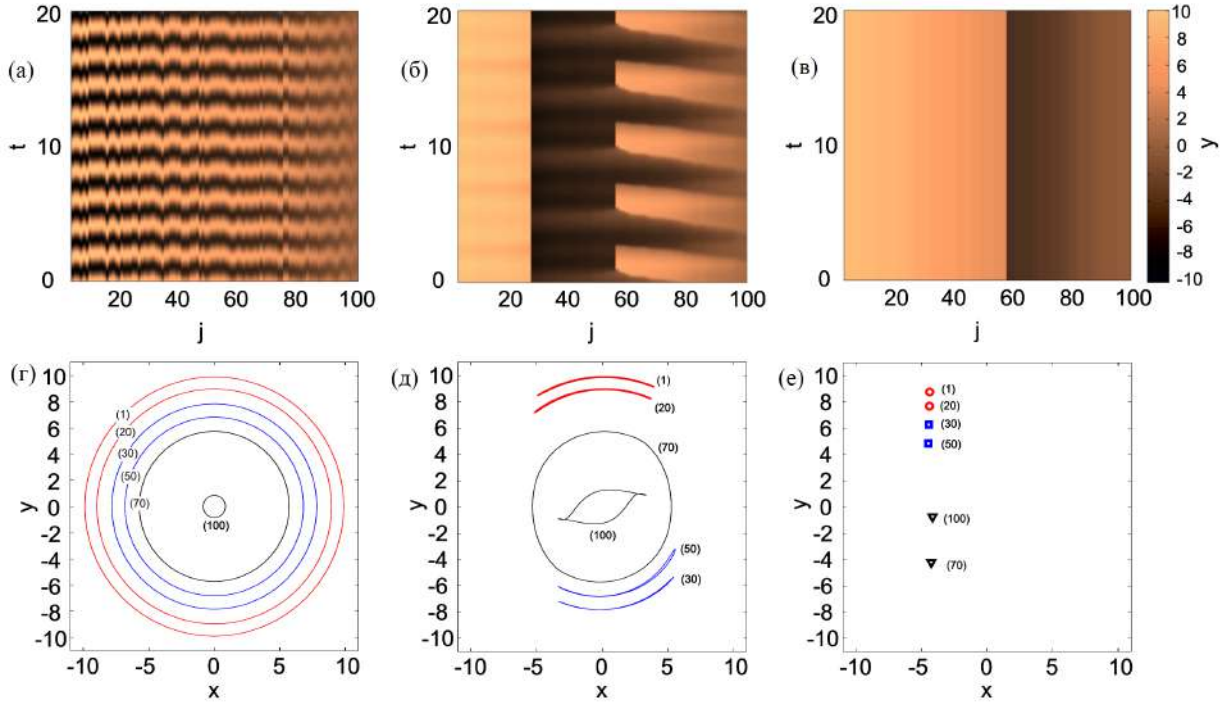

Рис. 2.18 – Однослойная адаптивная сеть с гетерогенным распределением λ_j и $\omega_0 = 3$. Пространственно-временны́е диаграммы $y_j(t)$, $j = 1, \ldots, 100$: (а) $K = 0$; (б) $K = 0{,}01$; (в) $K = 0{,}1$. Проекции на парциальные фазовые плоскости (x_j, y_j) для $j = 1, 20, 30, 50, 70, 100$: (г) $K = 0$; (д) $K = 0{,}01$; (е) $K = 0{,}1$.

Количественная характеристика иерархического перехода Для количественного анализа используются две характеристики. Амплитуда y-колебаний j-го узла:

$$y_a = \tfrac{1}{2}\big[\max_t y_j(t) - \min_t y_j(t)\big]\Big|_{t=t_0}^{T}, \tag{2.26}$$

где максимум и минимум вычисляются после завершения переходных процессов при $t \geqslant t_0$, $T \gg 0$. Центр масс (2.22):

$$y_{c.m.} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y_j(t)\,dt, \tag{2.27}$$

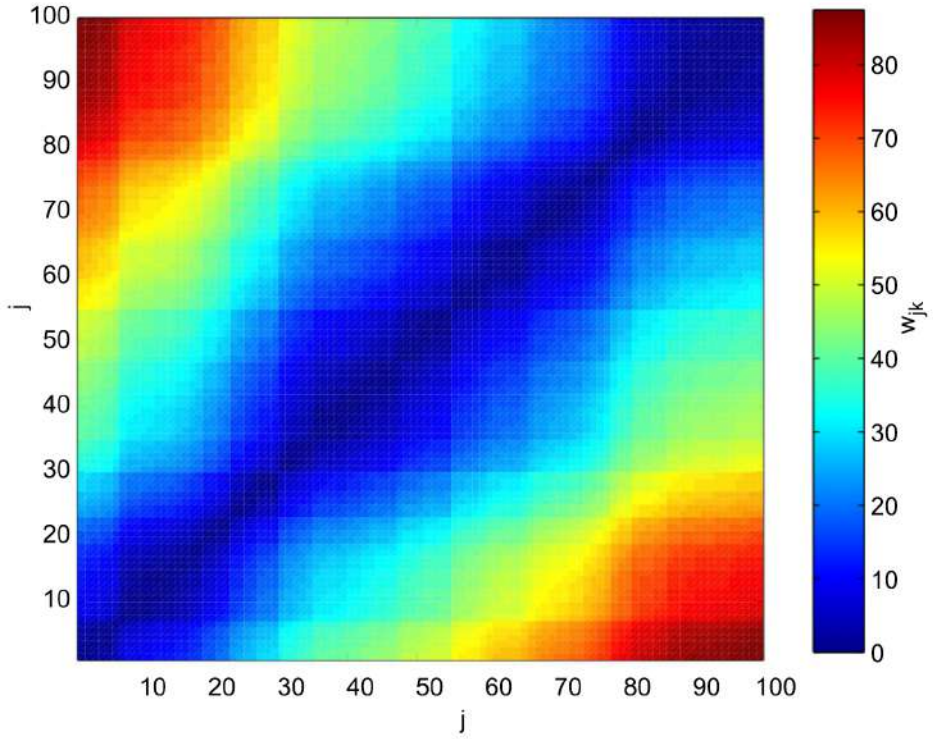

Рис. 2.19 – Снимок адаптивной матрицы внутрислоевых весов $w_{jk}(t)$ (2.24) в однослойной сети при $K = 0{,}01$. Красные области — сильные связи между осцилляторами из различных доменов; синие — слабые связи внутри одного домена.

позволяющий определить, находится ли осциллятор в колебательном ($y_{c.m.} \approx 0$) или подавленном ($y_{c.m.} \neq 0$, $y_a \approx 0$) режиме.

Зависимости $y_a(K)$ и $y_{c.m.}(K)$ представлены на рис. 2.20. Процесс иерархического перехода включает три стадии:

1. **Пороговая стадия ($K < 0{,}002$).** Амплитуды колебаний практически не изменяются.

2. **Стадия иерархического подавления ($0{,}002 < K < 0{,}012$).** Осцилляторы с наибольшими λ_j формируют домен почти подавленных колебаний с $y_{c.m.} > 0$; другая группа — аналогичный домен с $y_{c.m.} < 0$. Амплитуды уменьшаются иерархически, начиная с элементов с наибольшими λ_j. При $K \approx 0{,}012$ все осцилляторы становятся почти подавленными (рис. 2.20а).

3. **Стадия поглощения доменов ($K > 0{,}012$).** Первый домен ($y_{c.m.} > 0$)

поглощает элементы из второго ($y_{c.m.} < 0$). Этот процесс также иерархичен: первыми переходят осцилляторы с бóльшими λ_j (рис. 2.20б, в).

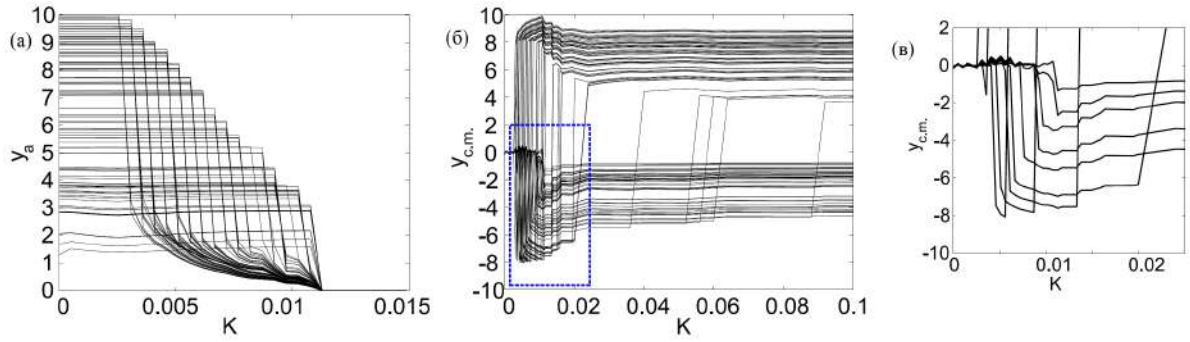

Рис. 2.20 – Иерархические переходы при увеличении K в однослойной адаптивной сети: (а) амплитуда $y_a(K)$; (б) центр масс $y_{c.m.}(K)$; (в) увеличенный фрагмент области, выделенной рамкой в (б), где для наглядности представлена лишь десятая часть всех осцилляторов. Иерархичность проявляется в последовательном подавлении, начиная с элементов с наибольшими λ_j.

2.3.3. Перенос доменной структуры между слоями

Обнаружен двухстадийный процесс, наблюдаемый при увеличении силы межслоевой связи C в мультиплексной сети (2.23) при фиксированных $K_1 = K_2 = 0{,}005$. Доменная структура, сформировавшаяся в первом (адаптивном) слое *ниже* критического значения C, *переносится* во второй (неадаптивный) слой, где аналогичное разделение на домены возникает *выше* этого критического значения.

Первая стадия: малые C При малых межслоевых связях ($C = 0{,}01$, $K_1 = K_2 = 0{,}005$) внутрислоевая адаптивная связь преобладает в первом слое, и коллективная динамика практически не искажается межслоевым взаимодействием.

Первый слой разделяется на три домена (рис. 2.21а): почти подавленные с $y^{(1)}_{c.m.} > 0$, почти подавленные с $y^{(1)}_{c.m.} < 0$, и осциллирующие. Второй слой

идентичных осцилляторов испытывает влияние первого через адаптивные связи (2.25): наблюдаются размытые колебания, различающиеся в зависимости от того, к какому домену первого слоя подключён соответствующий элемент (рис. 2.21б).

Профиль амплитуд второго слоя при $C = 0{,}01$ изменяется *неравномерно* относительно несвязанного случая $C = 0$ с идентичными $y_a^{(2)} = 1$ (рис. 2.22б, $C = 0{,}01$), а центры масс $y_{c.m.}^{(2)}$ становятся ненулевыми для элементов, связанных с положительным и отрицательным доменами первого слоя (рис. 2.22г, $C = 0{,}01$). При этом в адаптивном слое только при $C = 0{,}01$ сохраняются осциллирующие элементы; при бóльших C происходит полное подавление (рис. 2.22а).

Промежуточный режим: $C = 0{,}03$ и формирование четырёх доменов При $C = 0{,}03$ первый слой разделяется на *четыре* домена с чередующимися знаками $y_{c.m.}^{(1)}$ (рис. 2.22в, $C = 0{,}03$):

(1) $j = 1, \ldots, 30$: $y_{c.m.}^{(1)} > 0$ (подавленные);

(2) $j = 31, \ldots, 69$: $y_{c.m.}^{(1)} < 0$ (подавленные);

(3) $j = 70, \ldots, 88$: $y_{c.m.}^{(1)} > 0$ (подавленные);

(4) $j = 89, \ldots, 100$: $y_{c.m.}^{(1)} < 0$ (подавленные).

Во втором слое при $C = 0{,}03$ также выделяются четыре соответствующих домена: первый домен состоит из почти подавленных осцилляторов с $y_{c.m.}^{(2)} < 0$; второй — из элементов с положительным $y_{c.m.}^{(2)}$ и амплитудами, возрастающими с увеличением индекса j; третий — из осциллирующих элементов с центром, смещённым в отрицательную область; четвёртый — из элементов, наименее затронутых мультиплексностью, колеблющихся вокруг начала координат с $y_a^{(2)} \approx 1$.

Распределения амплитуд $y_a^{(2)}$ для $C = 0{,}03$ и $C = 0{,}1$ подобны друг другу: элементы с меньшими индексами j формируют домен почти подавленных осцилляторов, тогда как элементы с бóльшими j сохраняют колебания, причём чем больше j, тем больше их амплитуда (рис. 2.22б). Это *контринтуитивный* результат: элементы второго слоя с бóльшими j связаны с осцилляторами первого слоя, имеющими *меньшие* собственные амплитуды, и наоборот.

Вторая стадия: большие C При $C = 0{,}05$ (рис. 2.21в, г) межслоевая адаптивная связь приводит к возникновению новых коллективных режимов в обоих слоях. Осцилляторы первого слоя переходят в почти подавленные состояния с двумя различными средними (рис. 2.21в), тогда как во втором слое наблюдается разделение на *три отчётливых домена* (рис. 2.21г): (i) почти подавленные с отрицательным средним, (ii) почти подавленные с положительным средним, (iii) осциллирующие.

Первый домен неадаптивного слоя соответствует первому домену адаптивного слоя, тогда как второй и третий домены неадаптивного слоя соответствуют второму домену адаптивного.

При ещё бóльшем $C = 0{,}1$ режим аналогичен, однако большинство элементов второго слоя почти подавлены, а ещё осциллирующие элементы имеют $y_{c.m.}^{(2)} < 0$ (рис. 2.22г, $C = 0{,}1$). Первый слой содержит два домена почти подавленных осцилляторов с положительным и отрицательным $y_{c.m.}^{(1)}$ (рис. 2.22в). Соответствующие домены во втором слое имеют различные распределения $y_{c.m.}^{(2)}$: первый домен содержит элементы с одинаковым $y_{c.m.}^{(2)} \approx -1{,}5$, тогда как для остальных элементов распределение немонотонно — большинство имеют $y_{c.m.}^{(2)} < 0$, лишь единицы — $y_{c.m.}^{(2)} > 0$.

Таким образом, межслоевые адаптивные связи реализуют механизм *пе-*

реноса доменной структуры: сложная пространственная организация, возникшая благодаря гетерогенности и адаптивности первого слоя, воспроизводится во втором слое без какой-либо первичной неоднородности его параметров.

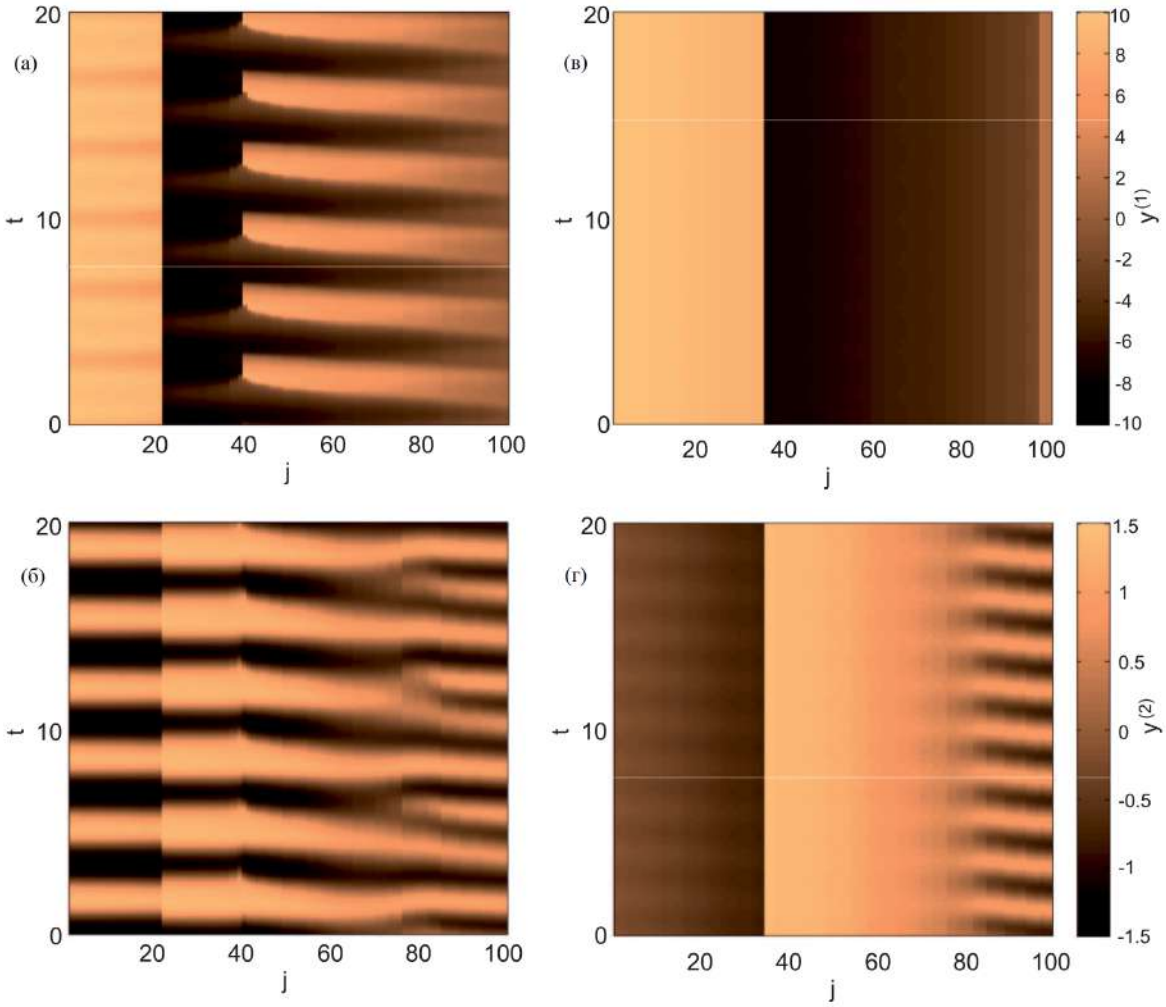

Рис. 2.21 – Двухстадийный перенос структуры. Пространственно-временны́е диаграммы $y_j^{(1,2)}(t)$, $j = 1, \ldots, 100$, при $K_1 = K_2 = 0{,}005$: (а) адаптивный слой, $C = 0{,}01$; (б) неадаптивный слой, $C = 0{,}01$; (в) адаптивный слой, $C = 0{,}05$; (г) неадаптивный слой, $C = 0{,}05$.

Общая картина: зависимость от C Полная картина влияния межслоевой связи представлена на рис. 2.23, где амплитуды $y_a^{(1,2)}$ и центры масс $y_{c.m.}^{(1,2)}$ представлены как непрерывные функции C.

Адаптивный слой (рис. 2.23а, в). Наблюдается иерархическое подавление: чем больше λ_{1j}, тем быстрее осциллятор уменьшает свою амплитуду. До $C \approx$

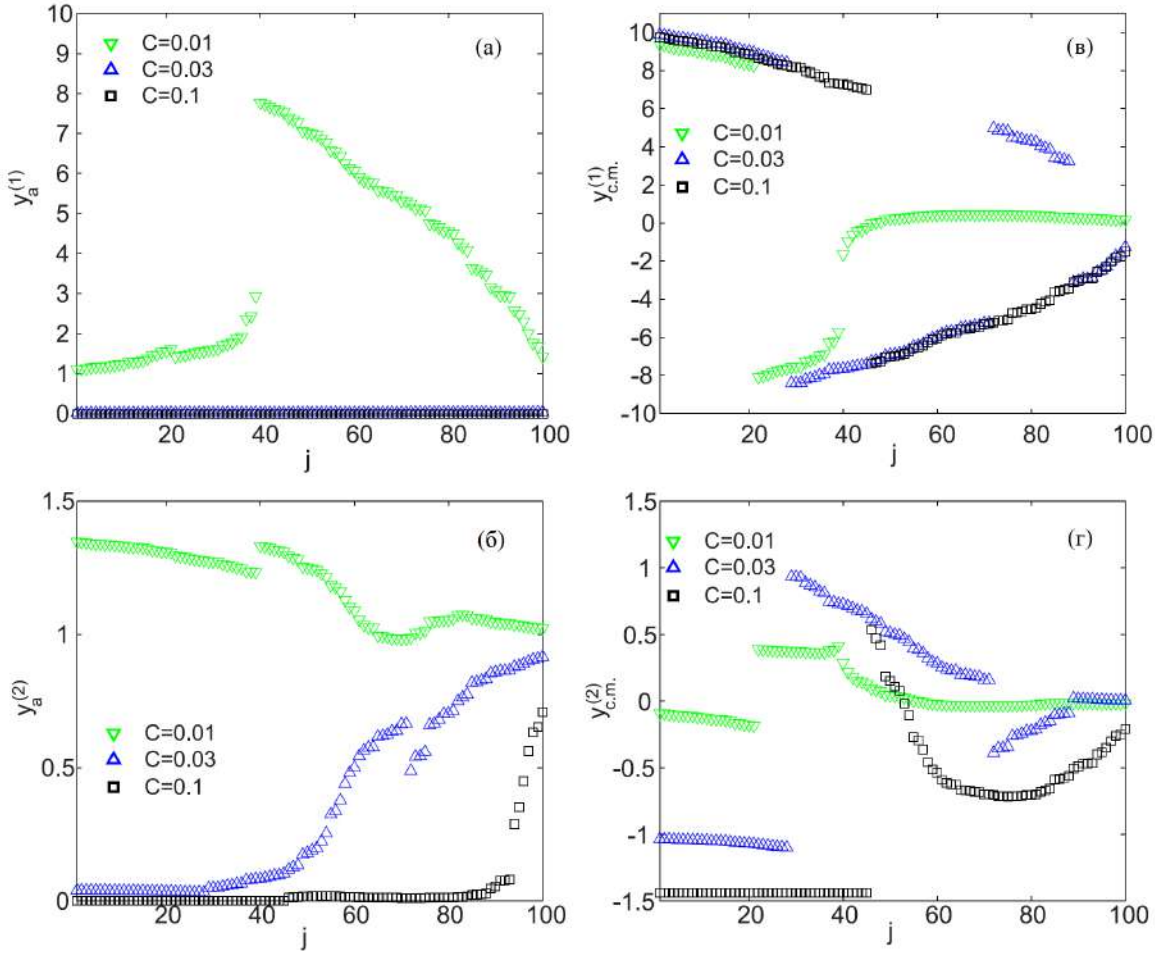

Рис. 2.22 – Профили амплитуд и центров масс для фиксированных значений межслоевой связи $C = 0{,}01,\ 0{,}03,\ 0{,}1$: (а, б) амплитуды $y_a^{(1)}$ и $y_a^{(2)}$; (в, г) центры масс $y_{c.m.}^{(1)}$ и $y_{c.m.}^{(2)}$. Левый столбец — адаптивный слой, правый — неадаптивный. При $C = 0{,}03$ в первом слое формируются четыре домена с чередующимися знаками $y_{c.m.}^{(1)}$. Контринтуитивно: элементы второго слоя с бóльшими j (связанные с осцилляторами с меньшими λ_j) имеют бóльшие амплитуды. Параметры: $K_1 = K_2 = 0{,}005$.

$0{,}025$ все осцилляторы адаптивного слоя становятся почти подавленными. Одновременно формируются три домена, различающихся по $y^{(1)}_{c.m.}$: положительный, отрицательный и близкий к нулю (рис. 2.23в). В интервале $0{,}02 \leqslant C \leqslant 0{,}04$ происходят множественные переходы $y^{(1)}_{c.m.}$, затрудняющие различение доменов; однако домены с большим положительным и большим отрицательным $y^{(1)}_{c.m.}$ всегда присутствуют.

При $C > 0{,}04$ наблюдаются два типа переходов: (1) осцилляторы из отрицательного домена перемещаются в сильно положительный — иерархически, первыми перемещаются элементы с *меньшими* λ_j; (2) отрицательный домен приобретает элементы из слабо положительного, что приводит к постепенному исчезновению последнего при $C > 0{,}08$.

Неадаптивный слой (рис. 2.23б, г). Большинство идентичных элементов второго слоя при $C < 0{,}025$ *увеличивают* амплитуды относительно начального $y^{(2)}_a = 1$. При $C > 0{,}025$ все амплитуды второго слоя становятся меньше $y^{(2)}_a = 1$ и постепенно уменьшаются в среднем; значительная часть становится практически нулевой — происходит постепенное подавление второго слоя. Существенно, что осцилляторы второго слоя, связанные с элементами первого, имеющими *бóльшие* амплитуды, подавляются *быстрее* остальных.

При $C > 0{,}03$ во втором слое появляются два домена: один с $y^{(2)}_{c.m.} < 0$ (почти подавленные), другой с $y^{(2)}_{c.m.} \geqslant 0$ (осциллирующие с различными амплитудами; чем больше $y^{(2)}_{c.m.}$, тем меньше $y^{(2)}_a$). С увеличением C отрицательный домен поглощает элементы из положительного, причём первыми переходят элементы с меньшими амплитудами.

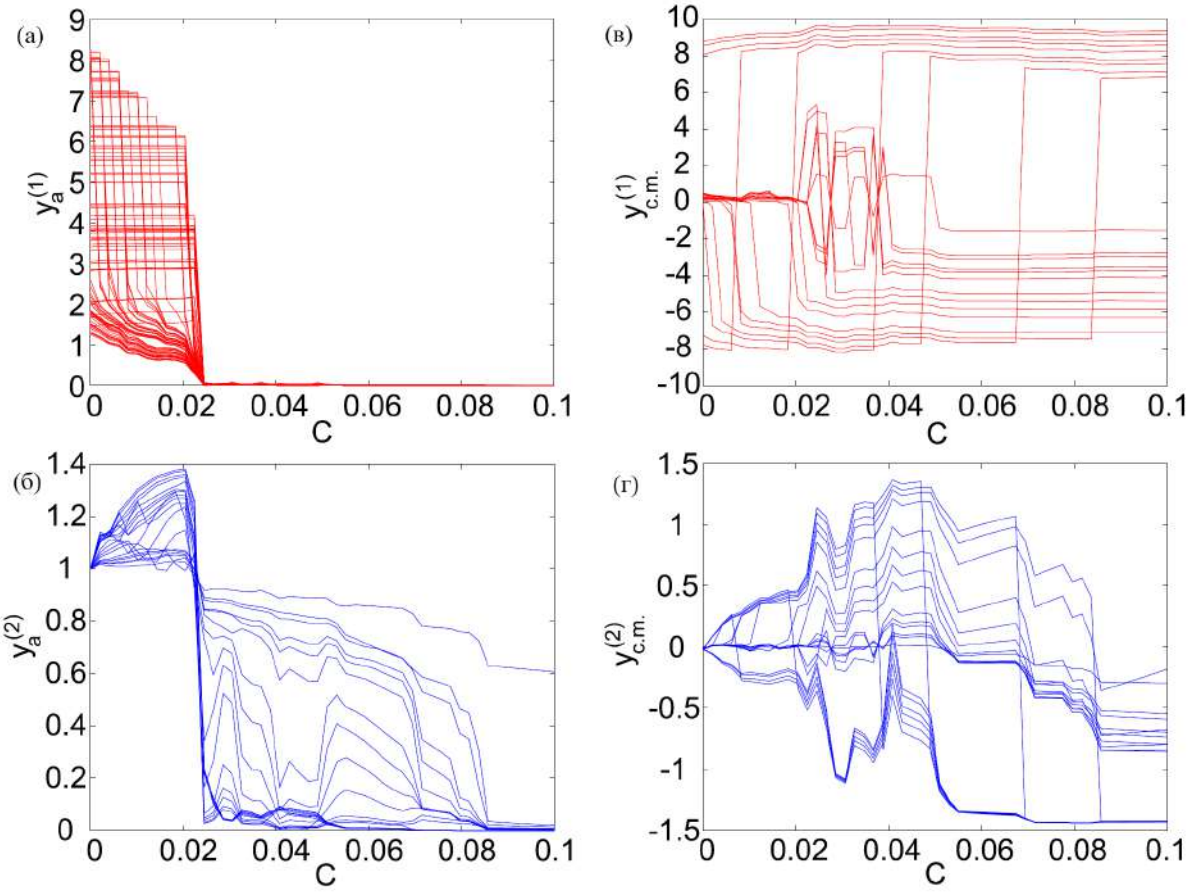

Рис. 2.23 – Количественные характеристики двухстадийного процесса: (а, б) амплитуды $y_a^{(1,2)}$ и (в, г) центры масс $y_{c.m.}^{(1,2)}$ как функции межслоевой связи C для (а, в) адаптивного и (б, г) неадаптивного слоёв. Параметры: $K_1 = K_2 = 0{,}005$. Представлена пятая часть всех осцилляторов для различимости индивидуальных кривых. Отчётливо видны две последовательные перестройки коллективной динамики: иерархическое подавление в адаптивном слое при $C < 0{,}025$ и формирование доменной структуры в неадаптивном слое при $C > 0{,}025$.

Центральный вывод. Доменная структура, сформировавшаяся в первом (адаптивном) слое *ниже* критического значения межслоевой связи, *переносится* во второй (неадаптивный) слой, где аналогичное разделение на домены возникает *выше* этого критического значения. Ниже критического C в адаптивном слое формируются три домена (два почти подавленных и один осциллирующий), тогда как второй слой остаётся преимущественно осциллирующим. Выше критического C все элементы адаптивного слоя подавлены, а во втором (неадаптивном) слое появляются три аналогичных домена: два из почти подавленных осцилляторов с отрицательным и положительным средними и третий — из осциллирующих элементов. Межслоевые адаптивные связи реализуют перенос доменной структуры: сложная пространственная организация, возникшая благодаря гетерогенности и адаптивности первого слоя, воспроизводится во втором слое без какой-либо первичной неоднородности его параметров.

2.3.4. Пространственный хаос в кольцах бистабильных осцилляторов Баутина

Сложные пространственные режимы могут возникать не только за счёт мультиплексности и корреляций структура–динамика, но и за счёт внутренней бистабильности элементов сети. В кольцах и цепочках связанных осцилляторов Баутина, находящихся в бистабильном режиме, обнаружено явление *неупорядоченного подавления колебаний*, представляющее собой качественно новый тип пространственной самоорганизации. В настоящем подразделе представлены аналитические результаты о существовании и устойчивости пространственно-хаотических распределений амплитуд, а также численные данные о влиянии частотной неоднородности на этот процесс.

Осциллятор Баутина и его бифуркационная диаграмма Осциллятор Баутина — нормальная форма бифуркации Баутина (обобщённой бифуркации Андронова–Хопфа коразмерности два) [44]:

$$\dot{z} = (\alpha + i\omega)\, z + \beta\, |z|^2\, z - z\, |z|^4, \tag{2.28}$$

где $z = u + iv = r\, e^{i\phi} \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — управляющие параметры, $\omega > 0$ — собственная частота. Знак минус перед последним слагаемым соответствует отрицательной второй ляпуновской величине.

В зависимости от (α, β) в системе (2.28) наблюдаются три качественно различных режима (рис. 2.24):

- **Область R_1:** $\{\alpha < 0,\ \beta < 0\} \cup \{\alpha < -\beta^2/4,\ \beta > 0\}$ — единственный аттрактор — устойчивое равновесие O_s ($z = 0$).
- **Область R_2:** $\{\alpha > 0\}$ — неустойчивое равновесие O_u и устойчивый предельный цикл C_s с радиусом $r_s = \sqrt{(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha})/2}$.
- **Область R_3:** $\{\alpha < 0\} \cap \{\alpha > -\beta^2/4\} \cap \{\beta > 0\}$ — *бистабильность*: сосуществуют устойчивое равновесие O_s и устойчивый предельный цикл C_s с тем же радиусом r_s; их бассейны притяжения разделены неустойчивым предельным циклом C_u с радиусом $r_u = \sqrt{(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha})/2}$.

Границы между областями определяются тремя бифуркациями: суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа AH^-: $\{\alpha = 0,\ \beta < 0\}$; субкритическая AH^+: $\{\alpha = 0,\ \beta > 0\}$; седло-узловая бифуркация циклов SN: $\{\beta > 0,\ \alpha = -\beta^2/4\}$.

Настоящее исследование сосредоточено на области R_3, т. е. на бистабильном режиме.

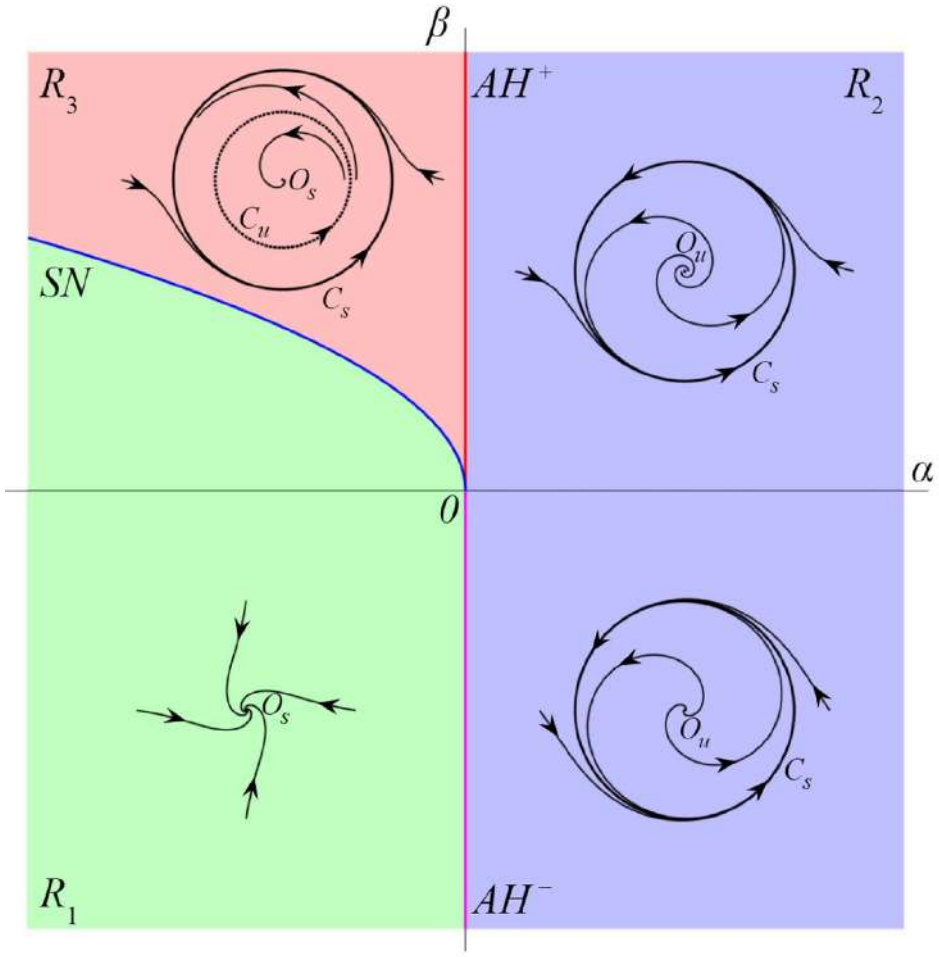

Рис. 2.24 – Бифуркационная диаграмма осциллятора Баутина (2.28) в плоскости (α, β). Области R_1, R_2, R_3 с различными наборами аттракторов показаны разным цветом; внутри каждой области схематически представлены фазовые портреты. O_s — устойчивое равновесие, O_u — неустойчивое, C_s — устойчивый предельный цикл, C_u — неустойчивый.

Кольцевая сеть и амплитудные уравнения Рассматривается кольцо из N осцилляторов Баутина с диффузионной связью:

$$\dot{z}_j = (\alpha + i\omega_j)\, z_j + \beta\, |z_j|^2\, z_j - z_j\, |z_j|^4 + c\,(z_{j-1} - 2z_j + z_{j+1}), \quad j = 1, \ldots, N, \tag{2.29}$$

с периодическими граничными условиями $z_{N+1} = z_1$, $z_0 = z_N$.

Для идентичных осцилляторов ($\omega_j = \omega$) и синфазных колебаний ($\phi_j = \phi(t)$) система разделяется на уравнения для амплитуд

$$\dot{r}_j = \alpha\, r_j + \beta\, r_j^3 - r_j^5 + c\,(r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1}), \qquad r_{j+N} = r_j, \tag{2.30}$$

и для фаз $\dot{\phi}_j = \omega$.

Существование пространственного хаоса: подкова Смейла Стационарные решения (2.30) удовлетворяют разностному уравнению

$$c\,(r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1}) + F(r_j) = 0, \qquad F(r) = r^5 - \beta\, r^3 - \alpha\, r. \tag{2.31}$$

При замене $r_{j-1} = x_j$, $r_j = y_j$ уравнение (2.31) переписывается как двумерное отображение типа Эно:

$$T: \begin{cases} \bar{x} = y, \\ \bar{y} = \Phi(y) - x, \end{cases} \qquad \Phi(y) = 2y + \frac{1}{c}\, F(y). \tag{2.32}$$

В фазовой плоскости отображения T строится квадрат S с вершинами

$(0,0)$, $(a,0)$, (a,a), $(0,a)$, где

$$a = \sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2}}, \qquad \beta^2 + 4\alpha > 0, \tag{2.33}$$

есть максимальный положительный корень уравнения $F(y) = 0$ (совпадающий с амплитудой устойчивого предельного цикла одиночного осциллятора r_s).

Образ TS квадрата S при отображении T пересекает S по трём компонентам V_1, V_0, V_2 (рис. 2.25а), если выполнены условия:

$$\Phi(x_{\text{max}}) > 2a, \tag{2.34}$$

$$\Phi(x_{\text{min}}) < 0, \tag{2.35}$$

где $x_{\text{max,min}} = \sqrt{(3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 - 20(2c - \alpha)})/10}$ — точки экстремума Φ, существующие при

$$c < \frac{9\beta^2}{40} + \frac{\alpha}{2}. \tag{2.36}$$

Условие (2.35) выполняется при

$$c < \frac{\beta^2}{8} + \frac{\alpha}{2}. \tag{2.37}$$

Прообразы $H_i = T^{-1}V_i$, $i = 1, 2$, представлены на рис. 2.25б, в. Достаточные условия гиперболичности для отображения T на $H_1 \cup H_2$ сводятся к неравенствам [107]:

$$\sup_{(x,y)\in H_i} \frac{1}{|\Phi'(y)|} < \frac{1}{2}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.38}$$

что эквивалентно

$$\frac{c}{|5m^4 - 3\beta m^2 + 2c - \alpha|} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{c}{|5l^4 - 3\beta l^2 + 2c - \alpha|} < \frac{1}{2}, \tag{2.39}$$

где m — минимальный положительный корень $\Phi(x) = 2a$, l — максимальный положительный корень $\Phi(x) = 0$. Для достаточно малых c неравенства (2.39) выполняются, поскольку l не зависит от c, а $m \xrightarrow{c\to 0} \sqrt{\beta/2 - \sqrt{(\beta^2 + 4\alpha)/4}}$.

При выполнении условий (2.33), (2.37), (2.39) отображение T обладает геометрической подковой Смейла на $H_1 \cup H_2$. Замкнутое гиперболическое множество $\Lambda = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} T^j(H_1 \cup H_2)$ эквивалентно бернуллиевскому сдвигу с двумя символами. В частности, Λ содержит счётное множество седловых траекторий, периодических по j с произвольно большим периодом.

Области параметров, соответствующие существованию неупорядоченных распределений амплитуд, представлены на рис. 2.26а, б.

Градиентность и устойчивость неоднородных решений Система (2.30) является *градиентной*:

$$\dot{r}_j = -\frac{\partial G}{\partial r_j}, \qquad G = \frac{c}{2}[(r_{j+1} - r_j)^2 + (r_{j-1} - r_j)^2] + \int_0^{r_j} F(\rho)\, d\rho. \tag{2.40}$$

Следовательно, для любых начальных условий траектории стремятся к одному из устойчивых равновесий, соответствующих минимумам функции G. При периодических граничных условиях число равновесий конечно и экспоненциально растёт с N при $N \gg 1$.

Устойчивость однородного решения. Для однородного решения $\{r_j^* = a\}$ матрица Якоби $J^{(r)}$ системы возмущений амплитуд — циркулянт с собственны-

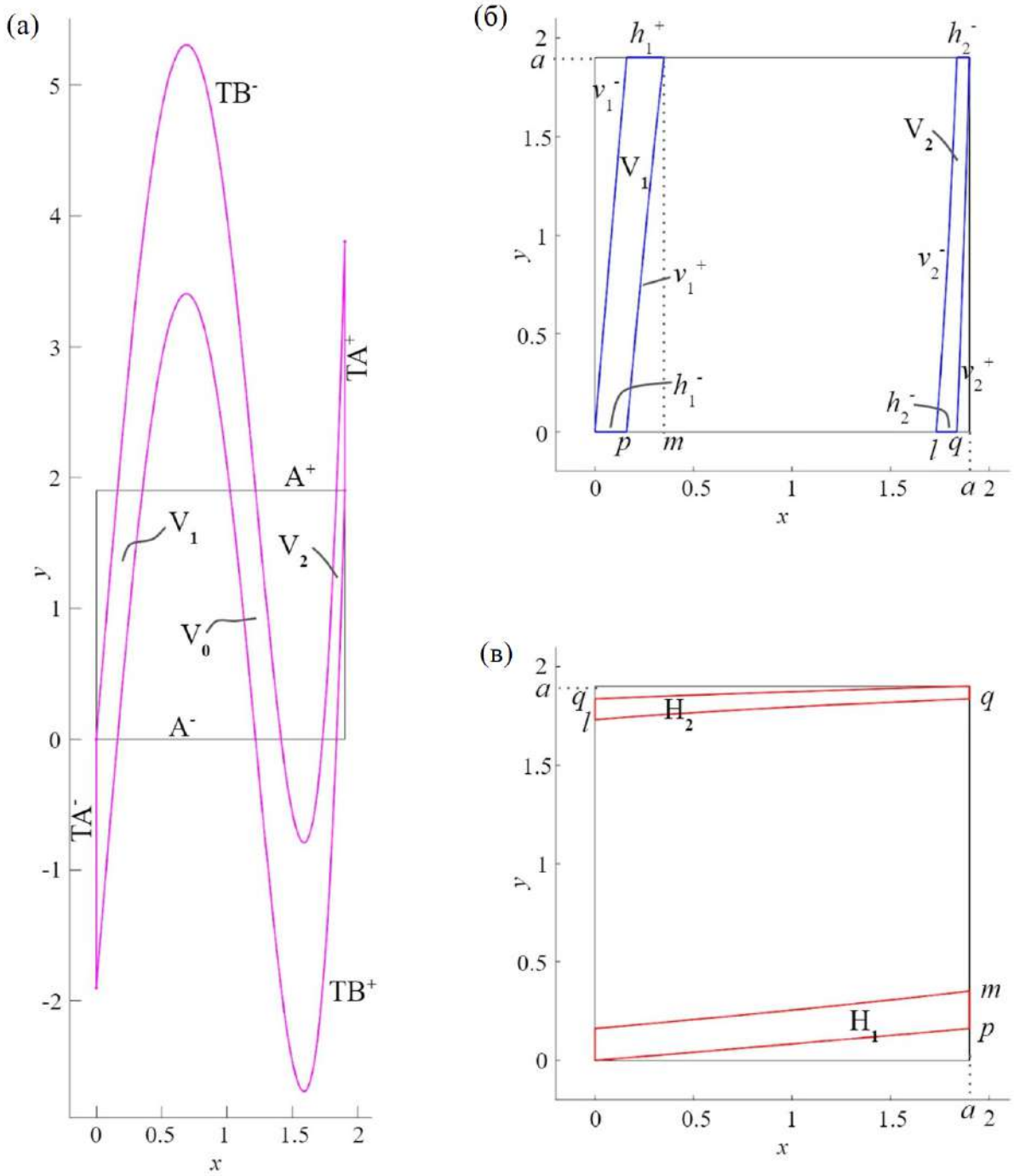

Рис. 2.25 – Построение подковы Смейла для отображения T (2.32): (а) квадрат S и его образ TS; области V_1, V_0, V_2 — компоненты пересечения $TS \cap S$; (б) области V_1, V_2 с границами; (в) прообразы H_1, H_2.

ми значениями:

$$\mu_k = -2a^2\sqrt{\beta^2+4\alpha} - 2c\Big(1-\cos\frac{2\pi k}{N}\Big), \qquad k=0,1,\dots,N-1. \quad (2.41)$$

Все $\mu_k < 0$ — однородное периодическое решение устойчиво.

Матрица Якоби $J^{(\phi)}$ для фазовых возмущений также является циркулянтом:

$$p_k = -2c + 2c\cos\frac{2\pi k}{N}, \qquad k=0,1,\dots,N-1. \quad (2.42)$$

Отсюда $p_0 = 0$ (соответствует решению $\phi = \omega t + \phi_0$), а все остальные $p_k < 0$.

Устойчивость неоднородных решений. Для неоднородных решений $\{r_j^*\}$ явное вычисление собственных значений невозможно. Применяется метод *дисков Гершгорина* (оценка расположения собственных значений матрицы по её строкам: каждое собственное значение лежит хотя бы в одном из кругов на комплексной плоскости, центры которых совпадают с диагональными элементами, а радиусы — с суммами модулей внедиагональных элементов соответствующей строки [141]). Диск Гершгорина матрицы $J^{(r)}$ для j-й строки:

$$|w + c\,\Phi'(r_j^*)| \leqslant 2c. \quad (2.43)$$

Поскольку каждое r_j^* лежит на пересечении $V_i \cap H_i$, имеем $\Phi'(r_j^*) > 0$, и диск (2.43) целиком расположен в левой полуплоскости при

$$-c\,\Phi'(r_j^*) + 2c < 0. \quad (2.44)$$

При наложенных выше ограничениях на параметры неравенство (2.44) выполняется, и все собственные значения $\mu_k < 0$.

Для фазовых возмущений диск Гершгорина имеет вид:

$$\left| w + \frac{c(r^*_{j+1} + r^*_{j-1})}{r^*_j} \right| \leqslant \frac{c(r^*_{j+1} + r^*_{j-1})}{r^*_j}. \tag{2.45}$$

Каждый диск (2.45) расположен в левой полуплоскости и касается мнимой оси только в начале координат. Матрица $J^{(\phi)}$ не имеет собственных значений с $\mathrm{Re}\, p_k > 0$, но может иметь нулевое (численные эксперименты подтверждают единственность нулевого собственного значения).

Таким образом, при условиях (2.33), (2.37), (2.39) система (2.30) обладает *единственным устойчивым однородным* периодическим решением и *большим числом устойчивых неоднородных* периодических решений. Для $N \gg 1$ число таких решений экспоненциально растёт, что порождает *пространственный хаос* [9, 38, 107] — хаотическое (неупорядоченное) распределение амплитуд колебаний вдоль кольца.

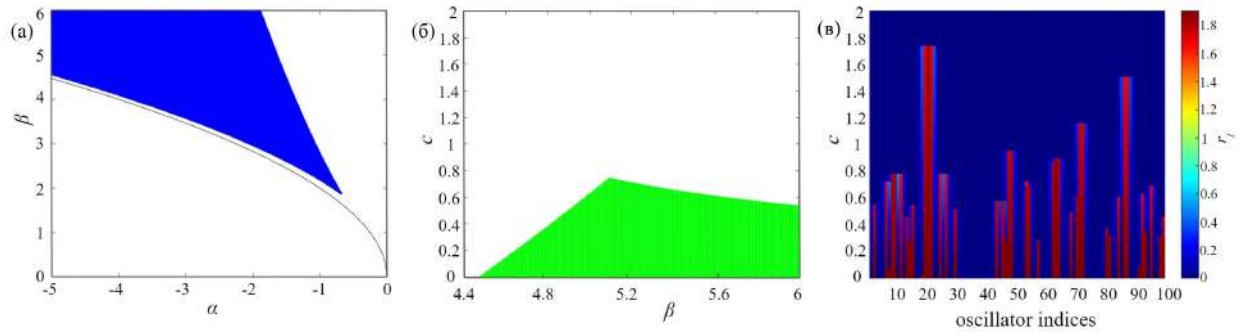

Рис. 2.26 – Области существования неупорядоченных распределений амплитуд: (а) в плоскости (α, β) при $c = 0{,}1$; (б) в плоскости (α, c) при $\beta = 5$. (в) Зависимость распределения амплитуд от силы связи c в кольце из $N = 100$ осцилляторов ($\alpha = -5$, $\beta = 5$).

Неупорядоченное подавление при синфазных и несинфазных начальных условиях При численном моделировании полной системы (2.29) с идентичными осцилляторами ($\omega_j = \omega$), начальными амплитудами $r_j = r_s$ и *случайными начальными фазами* наблюдается характерный сценарий (рис. 2.27а): в отсут-

ствие связи осцилляторы притягиваются к устойчивому предельному циклу, но из-за фазовых различий начиная с некоторой силы связи отдельные осцилляторы, случайно расположенные вдоль кольца, оказываются почти подавленными ($r_j \approx 0$), тогда как остальные сохраняют колебательную активность ($r_j \approx r_s$).

На рис. 2.27а различаются верхние ветви $r_j(c)$ (активные осцилляторы, постепенно уменьшающие амплитуду) и нижние ветви (элементы на границах между подавленными и осциллирующими доменами). С увеличением c элементы в случайном порядке переходят из верхних ветвей в подавленное состояние. При достаточно большом c все осцилляторы подавлены.

Наряду с амплитудными кластерами формируются *фазовые кластеры*, число которых в общем случае отличается от числа амплитудных; границы между фазовыми кластерами обычно проходят через элементы с нулевой амплитудой. Формирование фазовых кластеров происходит значительно медленнее, чем амплитудных (рис. 2.27б–г).

Отличие от осцилляторов Стюарта–Ландау. Механизм подавления в кольцах осцилляторов Баутина *принципиально отличается* от случая осцилляторов Стюарта–Ландау. В последнем случае подавление осциллятора приводит к эффективному сдвигу управляющего параметра ниже критического: равновесие в начале координат становится устойчивым, а предельный цикл исчезает. В случае осциллятора Баутина при подавлении возникает полуустойчивый предельный цикл, который исчезает через седло-узловую бифуркацию циклов; равновесие в начале координат остаётся устойчивым как до, так и после подавления.

Влияние частотной неоднородности Исследованы два типа распределения собственных частот ω_j:

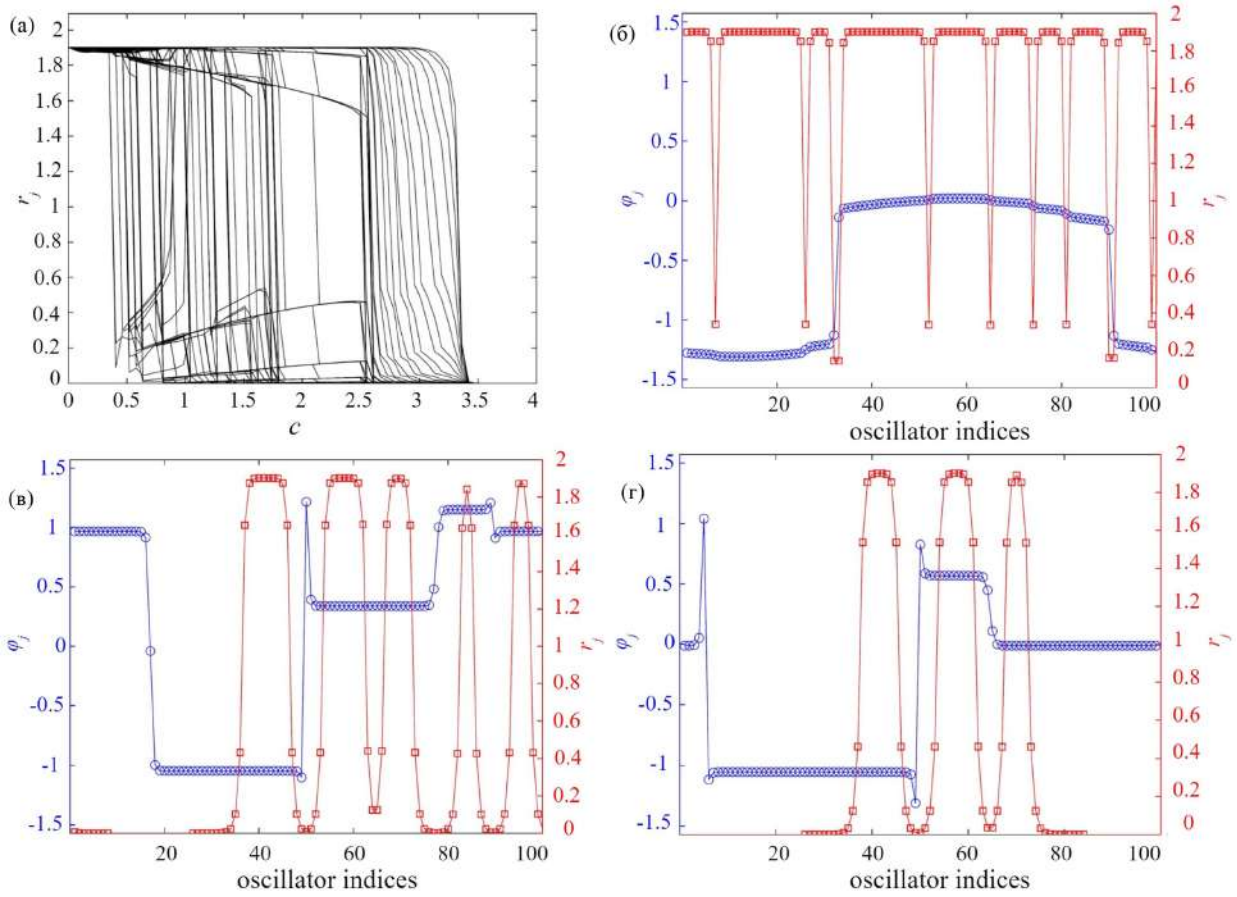

Рис. 2.27 – Неупорядоченное подавление в кольце из $N = 100$ идентичных осцилляторов Баутина ($\omega = 10$, $\alpha = -5$, $\beta = 5$): (а) амплитуды $r_j(c)$ при начальных $r_j = r_s$ и случайных фазах; (б–г) распределения фаз (кружки) и амплитуд (квадраты) вдоль кольца при $c = 0{,}5$, $c = 1$, $c = 2$.

- **V-образное распределение**: $\omega_j = \omega_{\min} + |j - N/2| \cdot (\omega_{\max} - \omega_{\min})/(N/2 - 1)$;

- **Случайное равномерное** на $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$.

В обоих случаях основные свойства неупорядоченного подавления, обнаруженные для идентичных осцилляторов, сохраняются: начиная с некоторой пороговой силы связи $c \approx 0{,}4$, отдельные элементы случайно становятся почти подавленными, и с увеличением c число подавленных элементов возрастает (рис. 2.29а, б).

Однако частотная неоднородность привносит существенное отличие: помимо амплитудного подавления, наблюдается формирование *частотных кластеров* — групп соседних осцилляторов с близкими значениями ω_j, колеблющихся с одинаковой или близкой средней частотой $\langle \omega_j \rangle$.

Для V-образного распределения процесс формирования частотных кластеров особенно выражен (рис. 2.28а): внутри каждого осциллирующего кластера элементы имеют одну и ту же частоту, причём в центре кольца (низкочастотные элементы) и на краях (высокочастотные) наблюдаются различные частоты. При случайном ω-распределении частотные кластеры менее выражены, поскольку соседние элементы могут иметь сильно различающиеся собственные частоты, и один осциллирующий кластер может содержать группы с различными средними частотами (рис. 2.28б).

Эволюция индивидуальных средних частот $\langle \omega_j \rangle$ при увеличении c обнаруживает характерную структуру (рис. 2.29в, г): для V-образного распределения наблюдаются отчётливые горизонтальные полосы, образованные слиянием индивидуальных кривых, соответствующие частотным кластерам, активным на определённых интервалах c. Низкочастотные элементы подавляются раньше

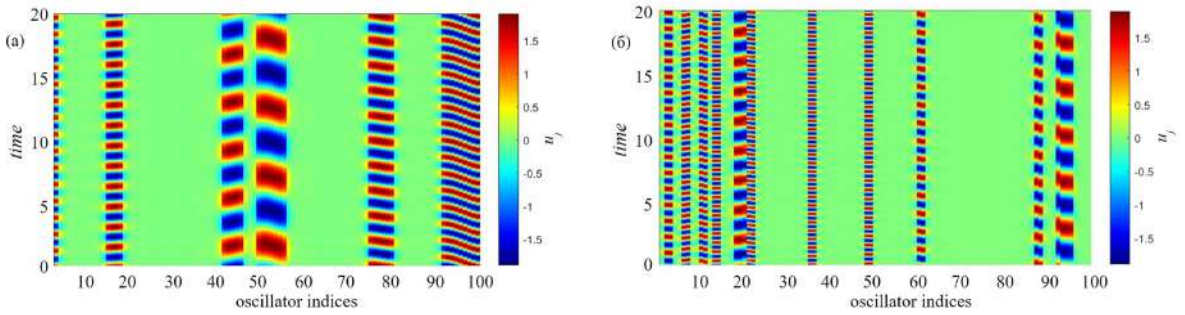

Рис. 2.28 – Пространственно-временны́е диаграммы $u_j(t) = \mathrm{Re}\, z_j(t)$ в кольце из $N = 100$ осцилляторов Баутина при $c = 1$: (а) V-образное распределение частот, $\omega_{\min} = 1$, $\omega_{\max} = 5$; (б) случайное равномерное распределение, $\omega_{\min} = 1$, $\omega_{\max} = 10$. Зелёные области — подавленная динамика; красно-синие — осциллирующие кластеры. Начальные условия: $r_j = r_s$, фазы случайны. Параметры: $\alpha = -5$, $\beta = 5$.

высокочастотных. При случайном ω-распределении процесс менее регулярен.

Ширина распределения частот $\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}$ является дополнительным параметром, влияющим на скорость подавления: *менее разнообразные* по частотам осцилляторы демонстрируют более продолжительную осциллирующую динамику; бóльшее ω-разнообразие приводит к более быстрому подавлению с увеличением c.

Характеристики осциллирующих кластеров Для количественной характеристики процесса неупорядоченного подавления исследуются число активных элементов n_{act} (осцилляторов с $r_j > r_u$) и число осциллирующих кластеров n_{clust} (связных групп активных соседей) в зависимости от c (рис. 2.30а, б).

Число активных элементов n_{act} начинает убывать с порогового $c \approx 0{,}4$ как для идентичных, так и для неидентичных осцилляторов. Поведение $n_{\text{clust}}(c)$, однако, качественно различается. Для *идентичных* осцилляторов n_{clust} постепенно возрастает, достигает пикового значения, а затем убывает ступенчато (рис. 2.30а): увеличение c приводит к поочерёдному появлению подавленных элементов, пространственно разделённых друг от друга, что увеличивает n_{clust} до насыщения.

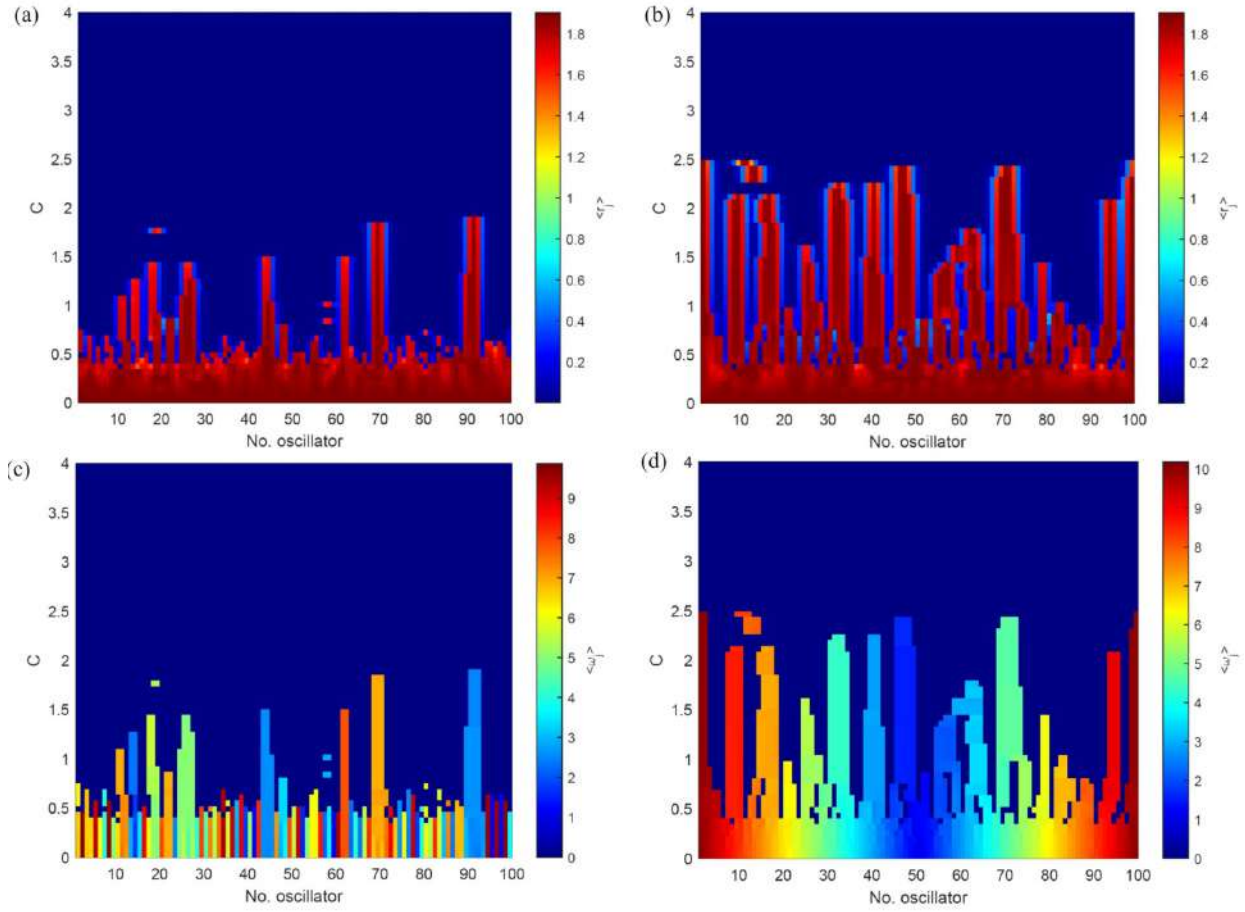

Рис. 2.29 – Неупорядоченное подавление в кольце неидентичных осцилляторов Баутина ($N = 100$, $\alpha = -5$, $\beta = 5$): (а, б) амплитуды $r_j(c)$ при начальных $r_j = r_s$ и случайных фазах для (а) случайного равномерного $\omega \in [1, 10]$ и (б) V-образного $\omega \in [1, 10]$ распределений; (в, г) соответствующие средние частоты $\langle \omega_j \rangle(c)$.

Для *неидентичных* осцилляторов n_{clust} резко возрастает до максимального значения и затем более быстро, но плавно убывает (рис. 2.30б): одновременно появляется множество подавленных элементов. Максимальное число кластеров n_{clust} в неидентичном случае почти вдвое превышает таковое для идентичных осцилляторов. Критическое значение c, при котором все элементы подавлены, убывает с увеличением разнообразия частот.

Распределения размеров осциллирующих кластеров s_{clust} при различных c представлены на рис. 2.30в, г. Для идентичных осцилляторов распределения хорошо аппроксимируются *степенными кривыми* с отрицательными наклонами, абсолютная величина которых возрастает с увеличением c: более сильная связь приводит к формированию кластеров мéньших размеров (рис. 2.30в). Для неидентичных осцилляторов разброс размеров кластеров меньше, а наклон распределения не столь существенно зависит от c (рис. 2.30г), т. е. пространственный порядок и беспорядок меньше зависят от силы связи.

2.4. Заключение к главе 2

В настоящей главе исследованы коллективные режимы в нелинейных сетях активных элементов с различной топологией, типами связей и механизмами адаптации. Осуществлён переход от одиночного элемента (Глава 1) к ансамблям: модель Курбажа–Некоркина и осцилляторы Стюарта–Ландау использованы как элементы сетей, для которых установлен репертуар коллективных состояний и количественно охарактеризована их устойчивость. Основные результаты, опубликованные в работах [А5–А11], состоят в следующем.

1. Проведено систематическое исследование бассейновой устойчивости S_B синхронизации бёрстов в сетях типа «малый мир» осцилляторов Курбажа–

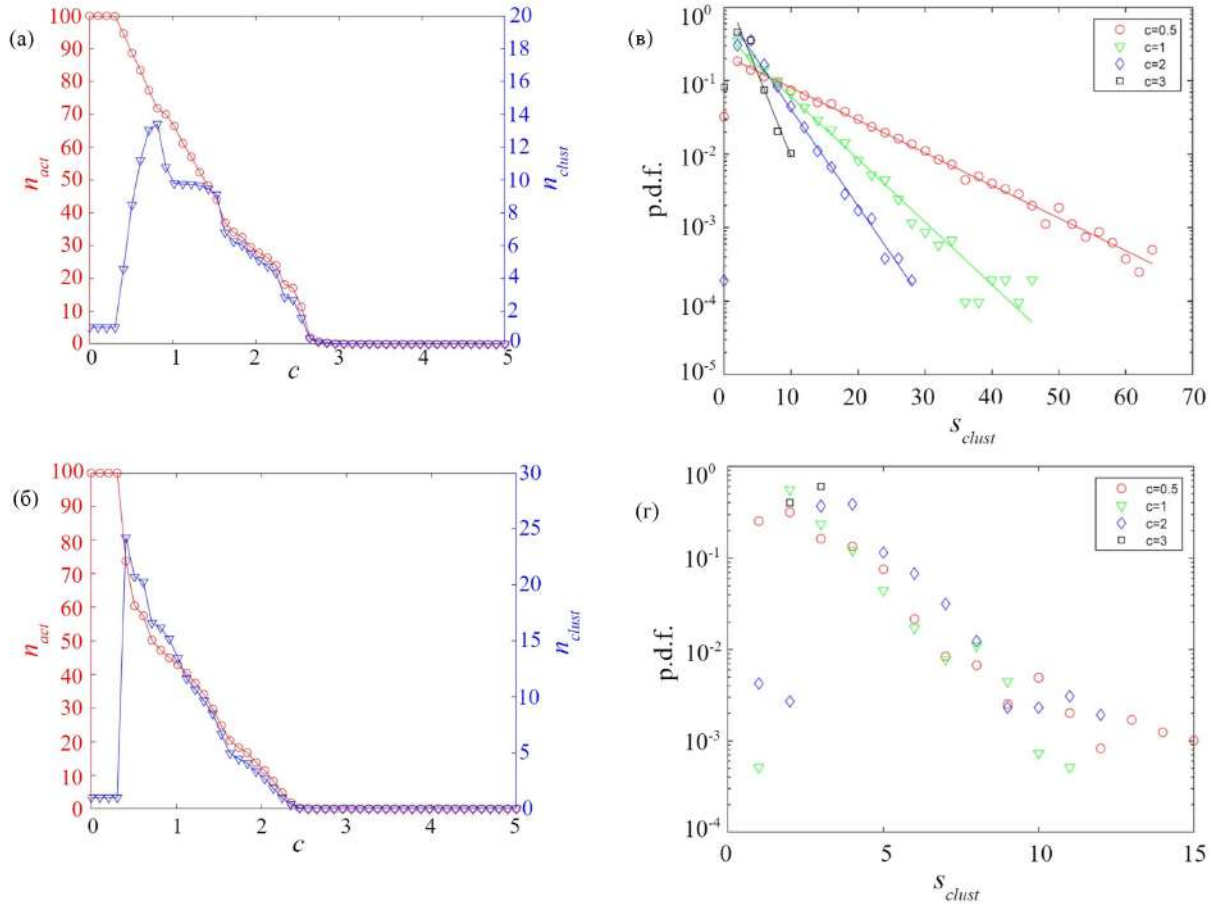

Рис. 2.30 – Характеристики осциллирующих кластеров в кольце из $N = 100$ осцилляторов Баутина ($\alpha = -5$, $\beta = 5$). Число активных элементов n_{act} и число кластеров n_{clust} в зависимости от c: (а) идентичные осцилляторы, $\omega = 5$; (б) случайное равномерное $\omega \in [1, 5]$. Плотность вероятности размеров кластеров s_{clust} при различных c: (в) идентичные; (г) неидентичные. Результаты усреднены по 1000 начальных условий ($r_j = r_s$, фазы случайны).

Некоркина. Бассейновая устойчивость — нелокальная мера робастности, определяющая долю случайных начальных условий, из которых система достигает целевого коллективного режима. Показано, что зависимость S_B немонотонна по всем исследованным параметрам: вероятности перестройки P_{rew}, плотности связей k, силе связи c, параметру быстрой подсистемы ε и параметру бёрстовой динамики J_0. Максимум $S_B(P_{\text{rew}})$ достигается в области топологии «малого мира», что указывает на существование оптимального соотношения между регулярными и случайными свойствами структуры сети.

2. Установлена корреляция между локальными максимумами $S_B(J_0)$ и границами ступенчатой зависимости числа спайков в бёрсте $N_{\text{spb}}(J_0)$, обнаруженной в Главе 1. Скачкообразное появление нового спайка в бёрсте приводит к локальному увеличению бассейна притяжения синхронного режима. Эта корреляция отражает фундаментальную связь между внутренней временно́й структурой бёрстов одиночного элемента и глобальной синхронизуемостью сети.

3. Показано, что убывание S_B при увеличении случайности топологии близко к линейному (а не экспоненциальному, как установлено ранее для осцилляторов Рёсслера), и существуют широкие интервалы P_{rew} с максимальной S_B. Неоднородность параметров δ_J монотонно уменьшает S_B, подчёркивая важность согласованности элементов для глобальной робастности коллективного режима.

4. Анализ распределений плотности вероятности $\rho_{x,y}$ в фазовой плоскости усреднённых по сети траекторий позволяет предсказать, приведёт ли данная топология к высокой или низкой бассейновой устойчивости, и тем са-

мым предоставляет диагностический инструмент для оценки робастности коллективных режимов.

5. Предложена модель адаптивной сети спайковых осцилляторов с подавляющими связями и событийной перестройкой топологии, порождающая метастабильные кластерные состояния. Введён формализм *гиперсети* — ориентированного графа переходов между кластерными состояниями (гиперсимплексами), обеспечивающий переход от микродинамики осцилляторов к дискретной «карте функциональной динамики».

6. Показано, что в автономном режиме система демонстрирует случайное блуждание по гиперсети, а при приложении постоянного стимула к одному узлу путь по гиперсети *детерминируется*: редуцированная гиперсеть содержит единственное исходящее ребро для каждого гиперсимплекса, и все траектории сходятся к стимул-специфичному шестициклу. Различные стимулы (приложенные к различным узлам) порождают различные шестициклы — сеть способна генерировать *стимул-специфичные* воспроизводимые последовательности кластерных переключений.

7. Результаты по адаптивным сетям подтверждены аппаратной реализацией на ПЛИС Xilinx Artix-7, функционирующей в реальном времени с характерными масштабами, сопоставимыми с нейронными. Аппаратная валидация подтверждает робастность обнаруженных режимов по отношению к аппаратным неточностям и ограниченной разрядности вычислений.

8. В гетерогенных безмасштабных сетях осцилляторов Стюарта–Ландау с корреляцией «степень–частота» и «степень–амплитуда» обнаружены иерархические процессы подавления колебаний. Формируются три домена с

качественно различной динамикой. Существенное отличие: при корреляции «степень–частота» подавление затрагивает обе вещественные переменные, а при «степень–амплитуда» — преимущественно одну из них.

9. В мультиплексной адаптивной сети обнаружен двухступенчатый механизм переноса доменной структуры: при малых межслоевых связях C домены формируются только в адаптивном гетерогенном слое; при увеличении C трёхдоменная структура «отпечатывается» на изначально однородный неадаптивный слой без первичной неоднородности. Механизм «отпечатывания» демонстрирует возможность передачи динамического «шаблона» между подсистемами.

10. В кольцевых сетях бистабильных осцилляторов Баутина обнаружен феномен неупорядоченного подавления колебаний: стационарные пространственно-неоднородные решения соответствуют пространственному хаосу. Совокупность результатов по доменным структурам иллюстрирует три различных механизма возникновения функционально-разделённых доменов активности: корреляция структура–динамика, межслоевая адаптивная связь и внутренняя бистабильность элементов. Во всех случаях пространственная неоднородность коллективных режимов возникает *самоорганизованно*, без явной оптимизации параметров.

Результаты настоящей главы устанавливают репертуар коллективных режимов в нелинейных сетях с фиксированными и адаптивными параметрами — от глобальной синхронизации бёрстов до метастабильных кластерных переключений и самоорганизованных доменных структур — и предоставляют количественные меры их устойчивости. Сквозной принцип: *коллективная динамика определяется не только типом элемента и силой связи, но и согласованием топологии*

сети с динамическим механизмом — наиболее робастные режимы возникают при оптимальных соотношениях между структурными и динамическими характеристиками.

В первых двух главах анализировались системы с фиксированными или локально адаптивными параметрами — *прямая задача* нелинейной динамики: при заданной архитектуре и параметрах определить возникающие режимы. В следующей главе осуществляется переход к *обратной задаче*: целенаправленная настройка параметров нелинейной сети под заданную функцию. Исследование ведётся тем же аппаратом нелинейной динамики — аттракторы, бифуркации, показатели Ляпунова, бассейны притяжения — но для сетей другого класса: рекуррентных нейронных сетей, рассматриваемых как нелинейные динамические системы с настраиваемыми параметрами. Те же динамические объекты — аттракторы, метастабильные состояния, переключения между режимами — обнаруживаются и в сетях без обучения (Глава 2), и в обученных (Главы 3–4), что подтверждает единство используемого аппарата описания.

ГЛАВА 3. РЕЗЕРВУАРНЫЕ СЕТИ И ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

В первых двух главах диссертации были исследованы два уровня описания нелинейных сетей активных элементов: динамика отдельных элементов (хаотические бёрстовые колебания, управляемые переходные режимы) и коллективные режимы в ансамблях с фиксированной и адаптивной архитектурой (нелокальная устойчивость синхронизации, гиперсетевые последовательности, иерархические доменные структуры). Эти результаты относились к *прямой задаче*: при заданных параметрах и архитектуре — какие режимы возникают и каковы их свойства?

Настоящая глава посвящена *обратной задаче*: целенаправленной настройке параметров нелинейной сети для реализации заданной функции. Тот же класс объектов — нелинейные сети активных элементов — и тот же аппарат описания — аттракторы, бифуркации, спектры операторов, показатели Ляпунова — но принципиально иная постановка. Если в главах 1–2 параметры фиксированы или эволюционируют по локальным правилам (адаптивные связи), то здесь они настраиваются глобальным алгоритмом для достижения предписанных функциональных режимов.

Центральная методологическая установка главы: *обучение нелинейной сети активных элементов трактуется как управляемая деформация фазового пространства*, формирующая аттракторные структуры и траектории, необходимые для реализации функциональных свойств. В рамках радиофизического

подхода цель состоит не только в демонстрации вычислительной работоспособности, но и в выявлении *динамических механизмов*, которые реализуют вычисления. В частности, аттракторы рассматриваются как динамические структуры, обеспечивающие автономную генерацию паттернов; управляемые переходные траектории — как динамические структуры, обеспечивающие вычисления по запросу; спектральные характеристики эффективного оператора связей — как количественные индикаторы сложности сформированного режима.

Закономерен вопрос: *зачем обучать сеть генерации сигнала, если сам целевой сигнал уже известен?* Цель обучения — не получение копии сигнала, а формирование внутри сети автономной динамической системы, способной воспроизводить целевой паттерн без внешнего задающего воздействия. Такая система представляет самостоятельный интерес по нескольким причинам. Во-первых, обученная сеть становится *автономным генератором*, не требующим внешнего источника сигнала после завершения обучения; это принципиально для задач управления, робототехники и нейропротезирования. Во-вторых, анализ внутренней динамики обученной сети позволяет установить, *какие именно динамические механизмы* — аттракторы, спектральные свойства, коллективная структура активности — необходимы и достаточны для воспроизведения данного паттерна. Тем самым задача генерации становится инструментом обратного анализа — восстановление внутренних механизмов системы по её наблюдаемому поведению): изучая, как сеть решает задачу генерации, мы выявляем принципы организации нелинейных колебаний в многомерных системах с обратной связью. В-третьих, обученная сеть может служить *суррогатной моделью* исходной динамической системы, позволяя прогнозировать её поведение и исследовать устойчивость без обращения к полным уравнениям.

Основное содержание главы (разделы 3.1–3.4) посвящено *резервуарным*

сетям — архитектурам, в которых фиксированная рекуррентная сеть (нелинейный преобразователь с неизменной внутренней структурой) дополняется обучаемым выходным линейным сумматором; обучение затрагивает только веса считывания. Сюда входят как классические резервуарные вычисления, так и резервуары с обратной связью, в которых выход подаётся обратно в сеть, замыкая контур автогенерации. Заключительный раздел 3.5 содержит систематическое сопоставление фиксированных резервуаров и *полностью обучаемых* рекуррентных архитектур (в которых настройке подвергаются все параметры сети, включая внутренние связи) с позиций структуры пространства состояний и вычислительной эффективности. Это сопоставление позволяет установить, какие динамические структуры формируются при различных степенях свободы обучения и каковы пределы вычислительных возможностей фиксированного нелинейного преобразователя.

Структура главы. В разделе 3.1 рассматриваются *резервуарные вычисления* — нелинейное преобразование входов в высокоразмерное пространство состояний с обучением только выходного линейного сумматора; исследуются задачи автономной генерации паттернов и спектральный механизм формирования аттракторов в резервуарах с обратной связью. В разделе 3.2 анализируется альтернативный механизм — вычисления на непритягивающих переходных траекториях, индуцируемых стимулом, также в рамках резервуарной архитектуры. В разделе 3.3 вводятся топологические и геометрические характеристики вычислений как инструмент количественного анализа соответствия между внутренней динамикой резервуара и структурой решаемой задачи. В разделе 3.4 представлена экспериментальная реализация физического вычислительного ядра — электронного резервуара на основе цепочки возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо с введением методологии томографии ядра для диагностики вычислитель-

ной ёмкости. Наконец, в разделе 3.5 проводится систематическое сопоставление фиксированных резервуаров и полносвязно обучаемых рекуррентных сетей с позиций структуры пространства состояний и вычислительной эффективности.

3.1. Генерация пространственно-временных паттернов в резервуарных сетях

3.1.1. Введение и постановка задачи

Подход резервуарных вычислений (*reservoir computing*, RC) возник на пересечении двух независимых направлений: *сетей эхо-состояний* (*echo state networks*, ESN), предложенных в работе [19], и *машин жидких состояний* (*liquid state machines*, LSM), введённых в работе [20]. Оба подхода объединяет общий принцип: рекуррентная нелинейная сеть — *резервуар* (нелинейная рекуррентная сеть с фиксированными внутренними связями, выполняющая роль нелинейного преобразователя входного сигнала в высокоразмерное пространство состояний) — используется как нелинейный преобразователь входного сигнала, а обучению подвергается исключительно линейный выходной сумматор (*считывающий слой*), осуществляющий линейную комбинацию активностей элементов резервуара. С позиции радиофизики резервуар представляет собой многомодовый нелинейный фильтр с фиксированной передаточной характеристикой, а считывающий слой — адаптивный линейный сумматор, настраиваемый на извлечение целевой информации из многомерного отклика.

Первоначально резервуарные вычисления применялись к задачам предсказания временных рядов [142] и классификации последовательностей [20]. Позднее область применения расширилась: реконструкция аттракторов [143, 144], вычисление показателей Ляпунова по данным [145], управление хаосом [146],

прогнозирование низко- и высокоразмерных пространственно-временных паттернов [147, 148] и другие задачи нелинейной динамики [149]. Отдельно следует выделить работы по прогнозированию макроскопической динамики адаптивных сетей Курамото [150] и встраиванию химерных состояний в рекуррентные нейронные сети [151], непосредственно примыкающие к проблематике настоящего раздела.

Особый интерес представляет задача автономной генерации целевых сигналов, поставленная и исследованная в контексте алгоритма FORCE [21]. Название FORCE (*First-Order Reduced and Controlled Error* — «уменьшенная и контролируемая ошибка первого порядка») отражает принцип работы метода: на каждом шаге обучения ошибка выхода подавляется до величины первого порядка малости посредством рекурсивного метода наименьших квадратов. В постановке FORCE обратная связь от выхода к резервуару замыкает контур автогенерации, и после обучения система функционирует как автономный генератор целевого паттерна.

Как отмечалось выше, задача обучения сети генерации сигнала преследует не цель копирования — целевой сигнал заведомо известен — а цель формирования автономной динамической системы, внутренний анализ которой раскрывает механизмы организации нелинейных колебаний. Параллельно с развитием резервуарных методов подход обратного анализа (*reverse engineering* — восстановление внутренних механизмов по наблюдаемому поведению) обученных рекуррентных сетей стал одним из эффективных инструментов вычислительной нейронауки [27]. Обученные сети рассматриваются как многомерные динамические системы с большим многообразием автоколебательных и стимул-индуцированных режимов; нелинейно-динамический подход обеспечивает единый язык для связи макроскопического (функционального) и микроскопическо-

го (нейронного) уровней описания [26, 152, 153]. Этот подход был успешно применён к построению функциональных сетей спайковых модельных нейронов [154—156] и обучению методом full-FORCE [157].

Несмотря на значительный прогресс, к моменту начала настоящих исследований оставался ряд нерешённых вопросов:

1. *Динамика внутри резервуара.* Большинство работ рассматривало резервуар как «чёрный ящик» [21, 22, 158], оценивая лишь качество выходного сигнала. Оптимизация гиперпараметров (размер сети, спектральный радиус матрицы смежности, временны́е константы) выполнялась эвристически [150, 151]. Вопрос о том, какие коллективные режимы формируются *внутри* резервуара при успешном обучении — на уровне индивидуальной активности отдельных элементов, распределений их переменных состояния и структуры обученных весов — систематически не исследовался.

2. *Роль параметров элементов.* Влияние временно́й константы τ на качество обучения в сетях эхо-состояний было отмечено эмпирически [159], однако систематическое двумерное исследование в пространстве (τ, ω), связывающее внутренний временной масштаб элементов с частотой целевого сигнала, отсутствовало.

3. *Спектральный механизм.* Низкоранговые возмущения случайных матриц изучались в теории случайных матриц [160]; динамика рекуррентных сетей с коррелированной низкоранговой структурой анализировалась в [161]. Однако связь спектральных выбросов эффективной матрицы связей с формированием конкретных автономных режимов в обученных рекуррентных сетях не была установлена.

4. *Резервуары на спайковых элементах.* Машины жидких состояний использовали спайковые нейроны накопление–сброс [20], однако резервуары на дискретных быстро-медленных нейронных отображениях, которые можно моделировать с высокой вычислительной эффективностью и которые обладают большим многообразием динамических режимов, не исследовались.

В настоящем разделе эти вопросы решаются последовательно. Сначала описывается архитектура резервуарной системы и алгоритм обучения FORCE (п. 3.1.2–3.1.3). Затем исследуется влияние временно́й константы на качество генерации в резервуаре на частотных нейронах, включая анализ индивидуальной динамики при успешном и неуспешном обучении (п. 3.1.4). Далее анализируются резервуары на дискретных спайковых элементах (п. 3.1.5) и формирование упорядоченной коллективной активности при обучении (п. 3.1.6). Переход к сложным многомерным целевым паттернам (п. 3.1.7) позволяет установить спектральный механизм формирования автономных режимов (п. 3.1.8) и исследовать микроскопические динамические механизмы и вклад структуры обученных весов на уровне отдельных элементов (п. 3.1.9).

3.1.2. Архитектура резервуарной системы

Рассматривается резервуарная система, схема которой представлена на рис. 3.1. Центральным элементом системы является резервуар — рекуррентная случайная сеть (нелинейная сеть активных элементов с обратной связью), структура которой определяется матрицей смежности **A**. Резервуар состоит из M частотных нейронов. Частотный нейрон — элемент, состояние которого описывается скалярной переменной активности x_i, а выходная функция $\varphi(x_i) = \tanh(x_i)$ определяет нелинейно преобразованный выходной сигнал i-го элемента. Мо-

дель широко используется в вычислительной нейронауке [12, 40] и является стандартным активным элементом в теории рекуррентных нейронных сетей. Автономная динамика системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tau \dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{M} A_{ij}\, \varphi(x_j), \quad i = 1, \ldots, M, \tag{3.1}$$

где x_i — активность i-го элемента, $\tau > 0$ — временна́я константа, определяющая характерное время релаксации, а нелинейная функция активации $\varphi(x_i) = \tanh(x_i) \equiv r_i$ задаёт выходной сигнал i-го элемента. Матрица смежности $\mathbf{A} = [A_{ij}] \in \mathbb{R}^{M \times M}$, фиксируемая на протяжении всей процедуры обучения и последующей автономной генерации, содержит значения, выбранные из гауссова распределения $\mathcal{N}(0,\, g^2/(pM))$, где $g > 0$ — глобальная сила связи (параметр, определяющий спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$), а $0 < p \leq 1$ — доля ненулевых элементов (параметр разреженности).

При $g > 1$ и достаточно большом M система (3.1) находится в режиме динамического хаоса [12]: собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ заполняют круг радиуса g в комплексной плоскости, и нелинейная динамика (3.1) демонстрирует нерегулярные пространственно-временны́е колебания. Этот режим обеспечивает широкое разнообразие откликов, необходимое для резервуарных вычислений, однако сам по себе не содержит структуры, согласованной с целевым сигналом.

В общем случае система содержит K выходных элементов. Активность k-го выходного элемента определяется линейной комбинацией

$$\hat{z}_k(t) = \sum_{j=1}^{M} W_{jk}\, r_j(t), \quad k = 1, \ldots, K, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{W} = [W_{jk}] \in \mathbb{R}^{M\times K}$ — матрица весов считывающего слоя, а $\mathbf{r}(t) = [r_1(t), \dots, r_M(t)]^\top$ — вектор выходных сигналов элементов резервуара. В матричной записи: $\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}^\top \mathbf{r}(t)$. Для случая единственного выхода ($K = 1$) матрица $\mathbf{W}$ вырождается в вектор $\mathbf{w}$.

Существенной особенностью архитектуры является наличие *обратной связи* от выходов $\hat{\mathbf{z}}(t)$ к резервуару, реализуемой матрицей $\mathbf{U} = [U_{ik}] \in \mathbb{R}^{M\times K}$, элементы которой выбираются из равномерного распределения на интервале $[-1, 1]$ и остаются фиксированными. Обратная связь замыкает контур автогенерации: после обучения и фиксации весов $\mathbf{W}$ система функционирует как автономный генератор. С учётом обратной связи динамика элементов резервуара принимает вид

$$\tau\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{M} A_{ij}\, r_j + \sum_{k=1}^{K} U_{ik}\, \hat{z}_k = -x_i + \sum_{j=1}^{M}\left(A_{ij} + \sum_{k=1}^{K} U_{ik}\, W_{jk} \right) r_j = \\ = -x_i + \sum_{j=1}^{M} \Omega_{ij}\ \tanh(x_j), \quad (3.3)$$

где введена *эффективная матрица связей*

$$\Omega = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^\top. \quad (3.4)$$

Матрица $\Omega \in \mathbb{R}^{M\times M}$ представляет собой сумму фиксированной случайной части $\mathbf{A}$ и низкоранговой добавки $\mathbf{U}\mathbf{W}^\top$ ранга не более K, формируемой контуром обратной связи через выходной сумматор. В процессе обучения матрица $\mathbf{W}$ модифицируется, что эквивалентно управляемой деформации эффективной структуры сети. После завершения обучения и фиксации $\mathbf{W}$ матрица Ω становится постоянной, и система (3.3) превращается в автономную M-мерную динамическую систему с фиксированными параметрами. Динамика элементов в сети

определяется, таким образом, эффективной структурой связей, представляющей собой комбинацию фиксированной части $\mathbf{A}$ и возмущающей части $\mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}$, сформированной в результате обучения.

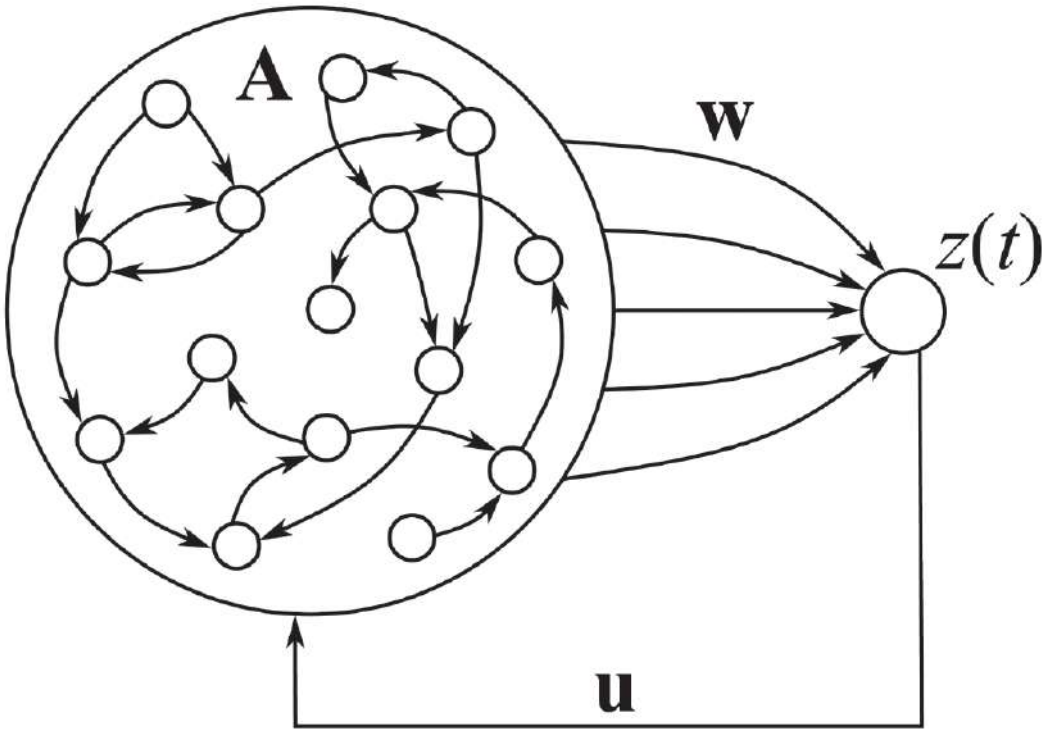

Рис. 3.1 – Схема резервуарной вычислительной системы с обратной связью. Резервуар — случайная рекуррентная сеть из M связанных частотных нейронов с фиксированной структурой $\mathbf{A}$. Система содержит K выходных элементов, активности которых $\hat{z}_k(t) = \sum_j W_{jk}\, r_j(t)$ определяются матрицей считывания $\mathbf{W}$, адаптируемой в процессе обучения алгоритмом FORCE. Выходные сигналы подаются обратно в резервуар через фиксированную матрицу $\mathbf{U}$, замыкая контур автогенерации. Эффективная матрица связей $\Omega = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}$ определяет конечную динамику обученной системы.

3.1.3. Алгоритм обучения

Матрица $\mathbf{W}$ модифицируется согласно алгоритму FORCE (*First-Order Reduced and Controlled Error* — « уменьшенная и контролируемая ошибка первого порядка»), предложенному в работе [21]. Алгоритм представляет собой онлайн процедуру адаптации весов на основе рекурсивного метода наименьших квадратов (*recursive least squares*, RLS): на каждом шаге текущая ошибка выхода

подавляется до величины первого порядка малости за счёт оптимальной коррекции весов. В процессе обучения через регулярные интервалы Δt вычисляются: вектор ошибки

$$\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^{\top}(t)\,\mathbf{r}(t) - \mathbf{z}(t), \tag{3.5}$$

где $\mathbf{z}(t)$ — вектор целевых сигналов, и матрица $\mathbf{P}(t) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ — текущая оценка обратной корреляционной матрицы векторов активности:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t-\Delta t) - \frac{\mathbf{P}(t-\Delta t)\,\mathbf{r}(t)\,\mathbf{r}^{\top}(t)\,\mathbf{P}(t-\Delta t)}{1 + \mathbf{r}^{\top}(t)\,\mathbf{P}(t-\Delta t)\,\mathbf{r}(t)}. \tag{3.6}$$

На их основе матрица весов обновляется по правилу

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-\Delta t) - \mathbf{P}(t)\,\mathbf{r}(t)\,\mathbf{e}^{\top}(t). \tag{3.7}$$

Формула (3.6) представляет собой лемму обращения матрицы (лемму Вудбери) в применении к последовательному уточнению оценки наименьших квадратов [162]. Инициализация производится как $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}/\alpha$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $M \times M$, а $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, контролирующий скорость обучения.

Для случая скалярного выхода ($K = 1$) формулы (3.5)–(3.7) сводятся к скалярным аналогам: $e(t) = \mathbf{w}^{\top}(t)\mathbf{r}(t) - f(t)$ и $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t-\Delta t) - e(t)\,\mathbf{P}(t)\,\mathbf{r}(t)$.

Процедура обучения начинается с $\mathbf{W} = \mathbf{0}$. На каждом шаге Δt матрица $\mathbf{W}$ модифицируется согласно (3.7) на основе текущей активности резервуара $\mathbf{r}(t)$ и вектора ошибки $\mathbf{e}(t)$. Постепенно элементы W_{jk} сходятся к некоторым стационарным значениям, и после завершения обучения веса фиксируются (рис. 3.2). Система переходит в режим автономной генерации, функционируя как многомерная динамическая система (3.3) с постоянной эффективной матрицей свя-

зей Ω.

С позиции теории нелинейных колебаний, процедура FORCE представляет собой последовательную настройку параметров автогенератора (3.3) с целью формирования предельного режима, воспроизводящего целевой сигнал. Обратная связь через выходной сумматор замыкает контур автогенерации; обучение — это управляемая деформация эффективной структуры связей, в результате которой в фазовом пространстве формируется аттрактор с требуемой структурой.

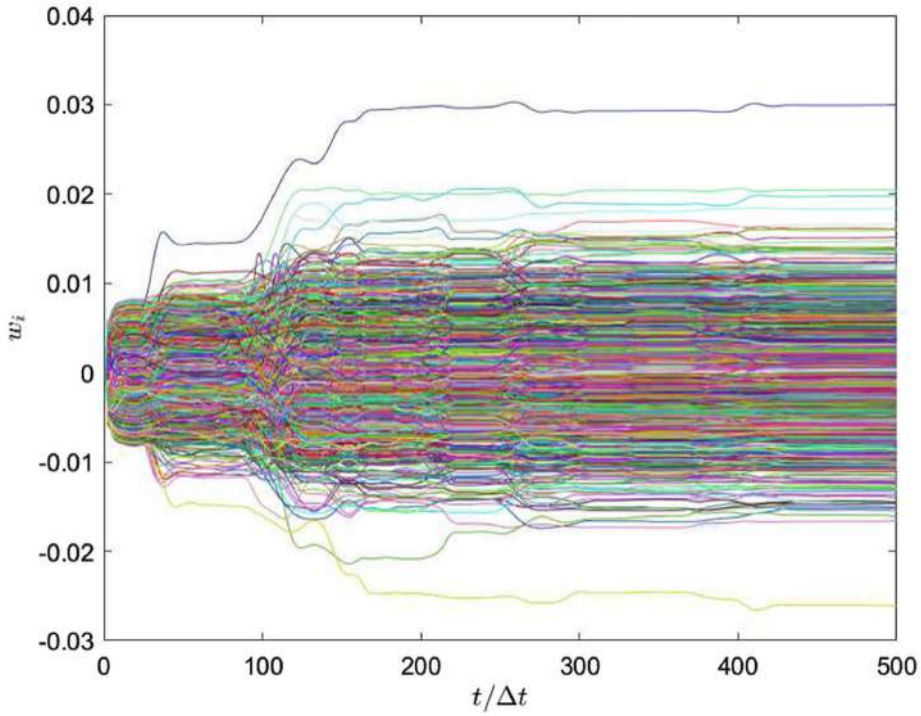

Рис. 3.2 – Динамика весов считывающего слоя $w_i(t)$, $i = 1, \ldots, M$, в процессе обучения алгоритмом FORCE для задачи генерации гармонического сигнала $f(t) = a\sin(\omega t)$. Обучение начинается при $t = 0{,}5$ и завершается при $t = 1{,}5$. Веса сходятся к стационарным значениям, после чего эффективная матрица связей Ω фиксируется. Параметры: $M = 1000$, $\tau = 0{,}01$, $g = 1{,}5$, $p = 0{,}1$, $\omega = 4\pi$, $a = 2$.

3.1.4. Роль временно́й константы: согласование внутреннего масштаба с целевым сигналом

Один из важных вопросов состоит в том, как динамический параметр элементов резервуара — временна́я константа τ — влияет на успешность обучения.

Физически τ определяет характерное время релаксации каждого элемента и, тем самым, полосу пропускания резервуара на этапах обучения и автономной генерации.

В качестве задачи обучения сеть должна автономно генерировать выходной сигнал $z(t)$, максимально точно воспроизводящий целевой гармонический сигнал $f(t) = a\sin(\omega t)$. Проведён систематический анализ пространства параметров (τ, ω). Результаты представлены на рис. 3.6. Установлены следующие закономерности:

1. В диапазоне частот $1 < \omega/(2\pi) < 10$ оптимальная временна́я константа, обеспечивающая минимальную ошибку, подчиняется гиперболическому закону $\tau_{\text{opt}} \sim 1/\omega$: для бóльших частот целевого сигнала наименьшая ошибка наблюдается при меньших значениях τ.

2. Наиболее широкий диапазон значений τ, соответствующий успешному обучению (малой ошибке), достигается при $\tau \approx 0{,}01$.

3. При значительном рассогласовании обучение неуспешно: при $\tau \ll \tau_{\text{opt}}$ система начинает генерировать колебания с собственным временны́м масштабом, в несколько раз меньшим периода целевой функции; при $\tau \gg \tau_{\text{opt}}$ система после обучения ещё демонстрирует колебания, приобретённые в ходе обучения, однако они постепенно затухают.

Обнаруженная зависимость допускает интерпретацию, близкую к принципу согласования полосы пропускания в радиофизике: эффективность нелинейного преобразователя наиболее высока при совпадении полосы пропускания с частотным диапазоном обрабатываемого сигнала. Следует, однако, отметить, что данная аналогия носит качественный характер: строгого аналитиче-

ского обоснования гиперболического закона $\tau_{\text{opt}} \sim 1/\omega$ для нелинейной системы (3.3) не получено. При оптимальном согласовании система находится вблизи границы устойчивости автономного режима, что обеспечивает компромисс между динамической памятью (способностью удерживать информацию о прошлых состояниях) и разнообразием откликов (размерностью пространства доступных траекторий).

Индивидуальная динамика элементов при различных τ. Качественный анализ индивидуальной динамики при трёх значениях τ подтверждает эту интерпретацию. На рис. 3.3 представлены пространственно-временны́е диаграммы выходных сигналов $r_i(t) = \tanh x_i(t)$ для трёх стадий: до обучения, во время обучения и после обучения. Во время свободной эволюции (до обучения) выходные сигналы демонстрируют некоррелированную динамику во всех трёх случаях. Во время обучения индивидуальная динамика становится высокоупорядоченной и коррелированной с целевой синусоидой в первом ($\tau = 0{,}001$) и втором ($\tau = 0{,}01$) случаях, тогда как в третьем ($\tau = 0{,}1$) динамика, хотя и демонстрирует координированные колебания, остаётся размытой. На этапе после обучения только второй случай ($\tau = \tau_{\text{opt}} = 0{,}01$) даёт положительный результат: система автономно генерирует паттерн, аналогичный паттерну этапа обучения.

При успешном обучении ($\tau = \tau_{\text{opt}}$) проекции фазовой траектории системы на парциальные фазовые плоскости $(x_i, \dot{x}_i)$ отдельных элементов образуют замкнутые предельные кривые различных симметричных форм и размеров (рис. 3.4б). При малом $\tau = 0{,}001$ парциальные траектории стремятся образовать замкнутые кривые, но через некоторое время покидают их (рис. 3.4а). При большом $\tau = 0{,}1$ траектории вращаются вокруг начала координат, но одновре-

менно смещаются, образуя незамкнутые кривые (рис. 3.4в) — что указывает на отсутствие аттрактора.

Распределения индивидуальных активностей. На рис. 3.5 представлены функции плотности вероятности индивидуальных активностей $x_i(t)$ на этапе автономной генерации. Элементы упорядочены по возрастанию стандартного отклонения $x_i(t)$. При успешном обучении ($\tau = 0{,}01$, рис. 3.5а) наблюдаются высокосимметричные распределения, центрированные вокруг нуля, с дисперсиями, различающимися на несколько порядков. При неуспешном обучении ($\tau = 0{,}1$, рис. 3.5б) распределения не центрированы вокруг общего значения, а имеют различные средние при близких дисперсиях — что соответствует парциальным фазовым портретам незамкнутого типа. Высокоупорядоченные симметричные распределения при успешном обучении и размытые — при неуспешном отражают способность (или неспособность) системы согласовать свою внутреннюю динамику с генерацией целевого сигнала.

3.1.5. Резервуар на дискретных спайковых элементах

Естественным развитием резервуарного подхода является его перенос на дискретные спайковые элементы, обладающие разнообразной нелинейной динамикой и высокой вычислительной эффективностью. Предложенная система характеризуется двумя важными особенностями по сравнению с резервуаром на частотных нейронах (п. 3.1.2). Во-первых, составляющие её элементы относятся к классу спайковых нейронов, генерирующих отдельные потенциалы действия, а не усреднённый выходной сигнал. Во-вторых, модель задаётся в виде точечного отображения (с дискретным временем), что исключает операцию численного интегрирования и делает систему готовым вычислительным алгоритмом.

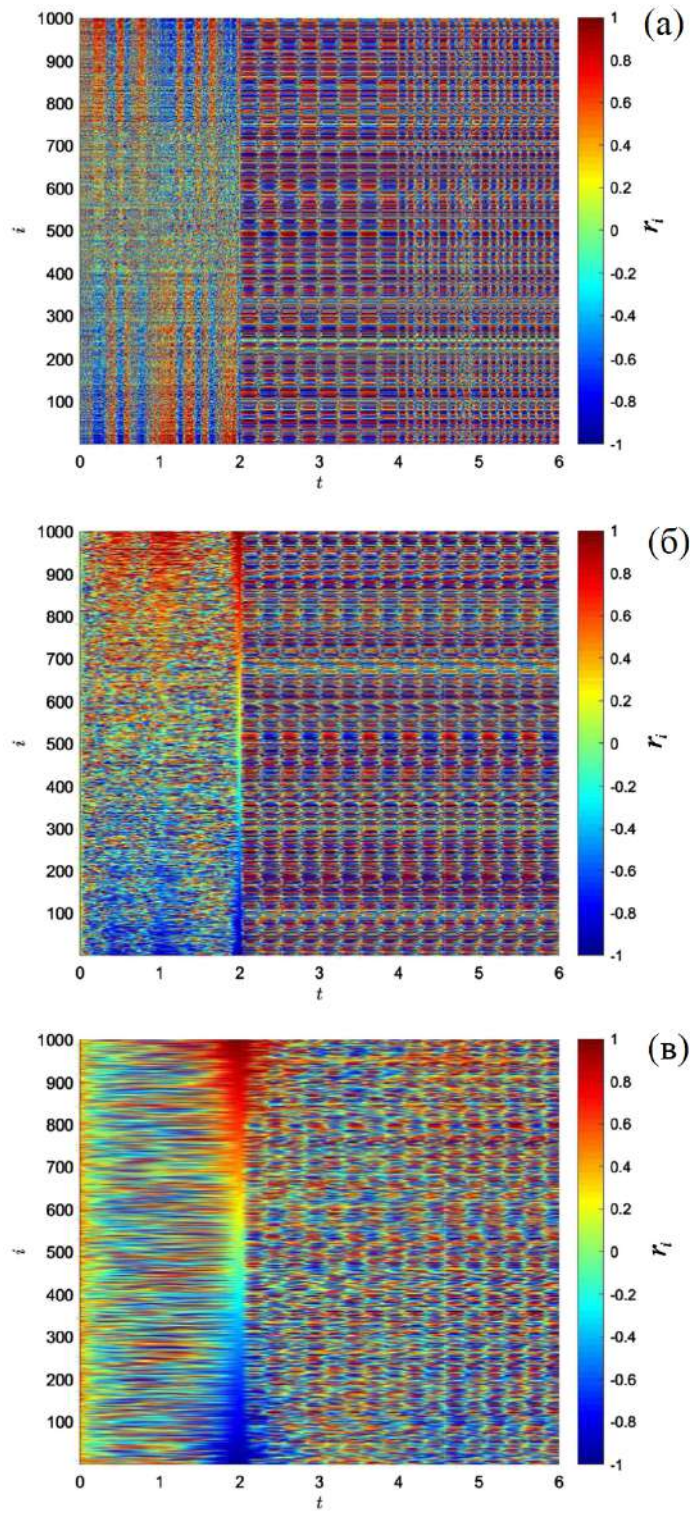

Рис. 3.3 – Пространственно-временны́е диаграммы выходных сигналов $r_i(t)$ элементов резервуара ($i = 1, \ldots, M$) для трёх значений временно́й константы: (а) $\tau = 0{,}001$; (б) $\tau = 0{,}01$; (в) $\tau = 0{,}1$. Цвет кодирует значения $r \in (-1, 1)$. Три стадии: до обучения ($t < 2$), во время обучения ($2 < t < 4$), после обучения ($t > 4$). Успешная автономная генерация наблюдается только при $\tau = 0{,}01$, когда внутренний временно́й масштаб элементов согласован с периодом целевого сигнала. Параметры: $M = 1000$, $g = 1{,}5$, $p = 0{,}1$, $\omega = 4\pi$, $a = 2$.

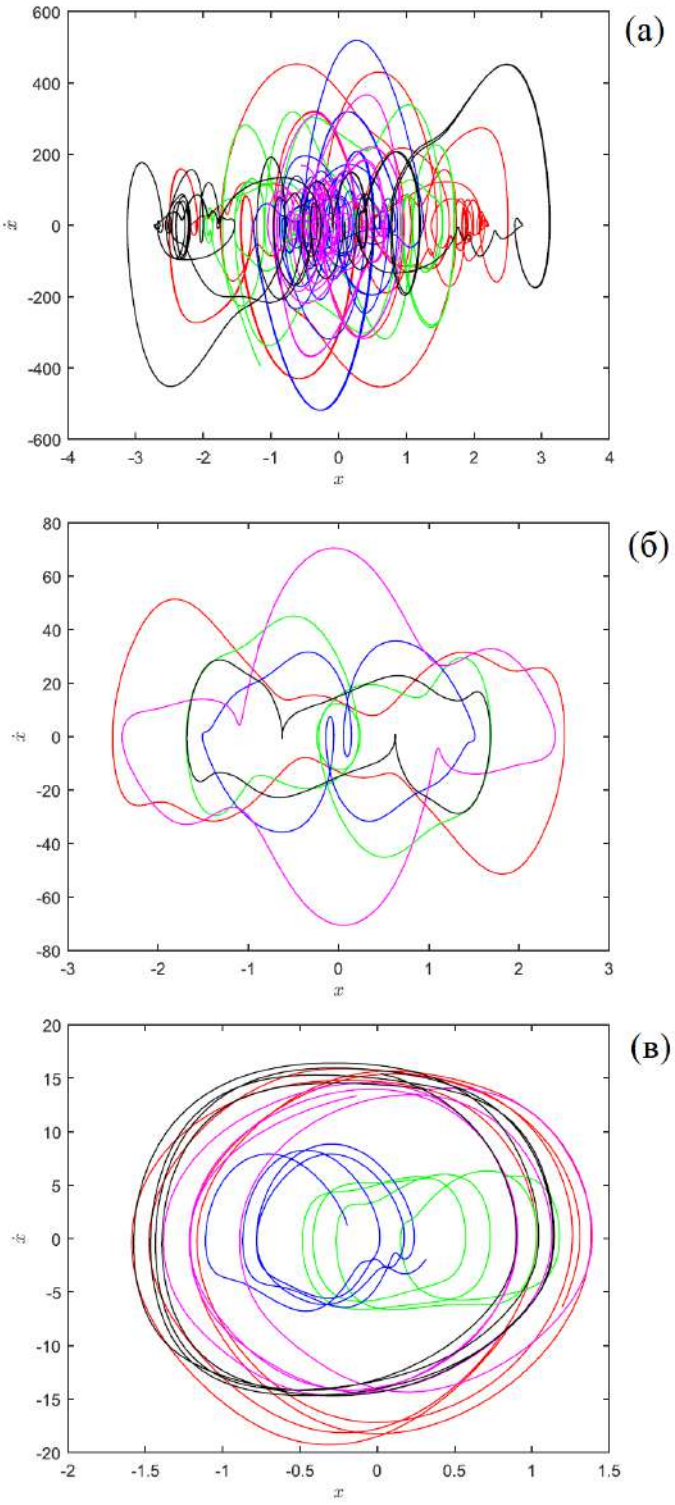

Рис. 3.4 – Парциальные фазовые портреты в плоскости $(x_i, \dot{x}_i)$ пяти случайно выбранных элементов резервуара после обучения для: (а) $\tau = 0{,}001$ — траектории стремятся к замкнутым кривым, но покидают их; (б) $\tau = 0{,}01$ — замкнутые предельные кривые различных симметричных форм и размеров; (в) $\tau = 0{,}1$ — траектории вращаются, но дрейфуют, образуя незамкнутые кривые. Целевой сигнал $f(t) = 2\sin(4\pi t)$. Замкнутые кривые при $\tau = \tau_{\text{opt}}$ свидетельствуют о формировании аттрактора в фазовом пространстве сети.

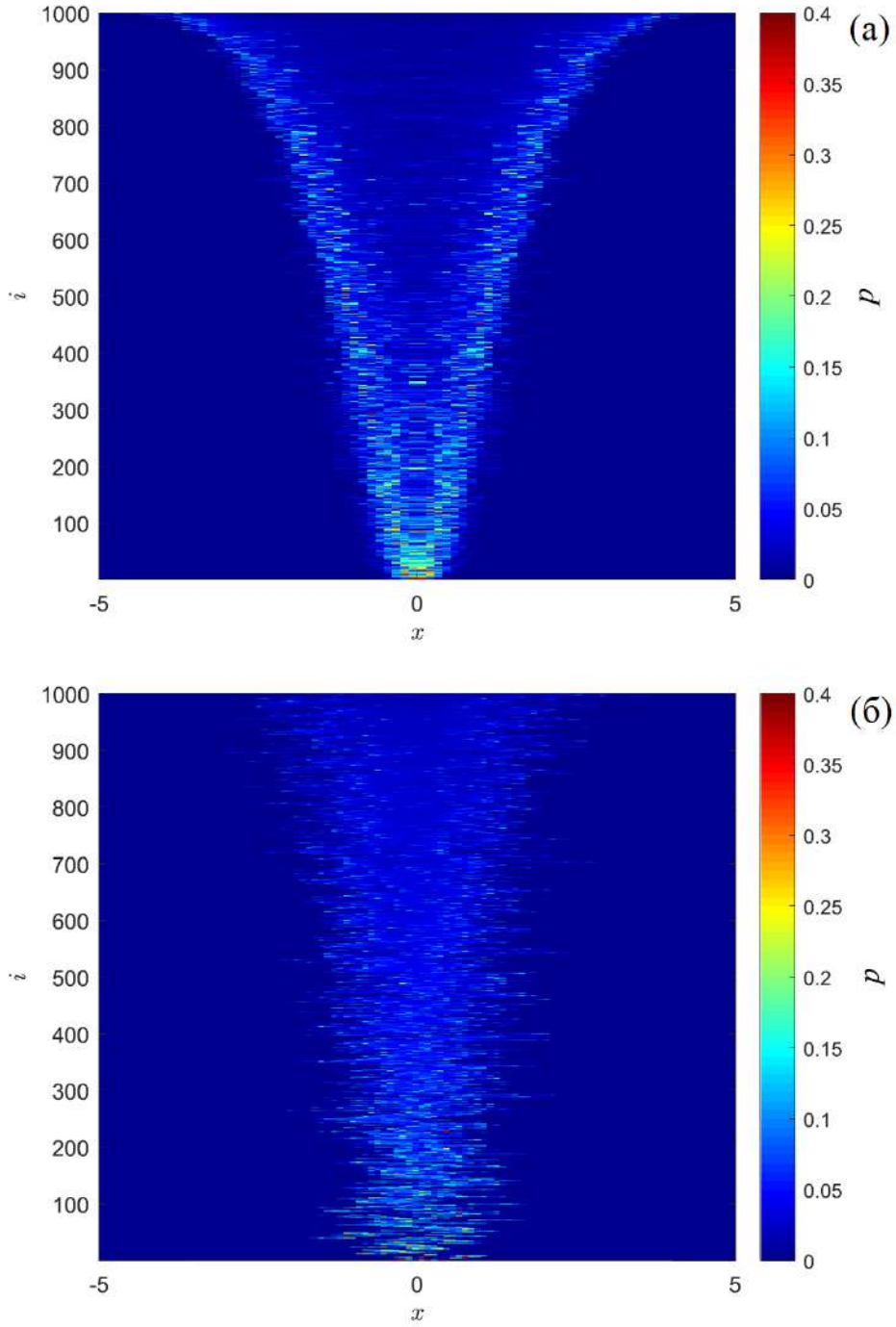

Рис. 3.5 – Распределения индивидуальных активностей $x_i(t)$ на этапе автономной генерации: (а) $\tau = 0{,}01$ (успешное обучение) — симметричные распределения, центрированные вокруг нуля, с дисперсиями, различающимися на несколько порядков; (б) $\tau = 0{,}1$ (неуспешное обучение) — распределения с различными средними и близкими дисперсиями. Цвет кодирует вероятность нахождения в данном значении x для каждого элемента $i = 1, \ldots, M$. Элементы упорядочены по возрастанию стандартного отклонения $x_i(t)$. Параметры: $M = 1000$, $g = 1{,}5$, $p = 0{,}1$, $\omega = 4\pi$, $a = 2$.

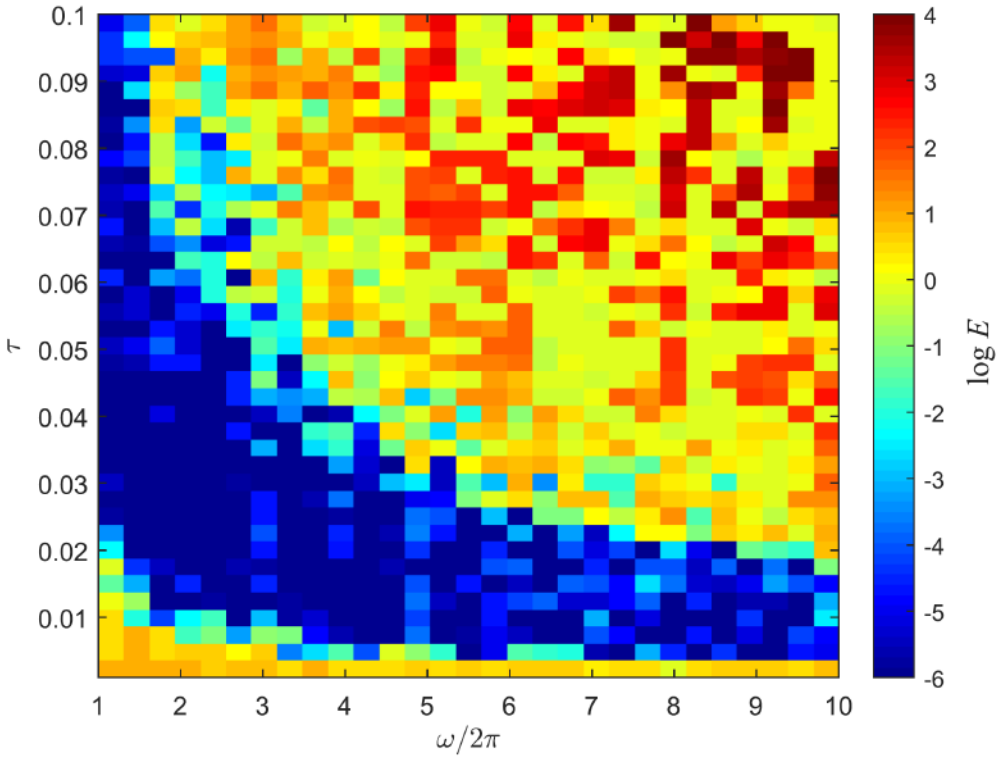

Рис. 3.6 – Логарифм нормированной ошибки $\log_{10}(E)$ как функция временно́й константы τ и частоты ω целевого гармонического сигнала $f(t) = a\sin(\omega t)$. Параметры: $M = 1000$, $g = 1{,}5$, $p = 0{,}1$, $a = 2$. Тёмные области соответствуют малой ошибке генерации ($E \ll 1$). Оптимальная область параметров вытянута вдоль гиперболы $\tau \sim 1/\omega$, что отражает необходимость согласования внутреннего временно́го масштаба элементов резервуара с периодом целевого паттерна.

В качестве элементов резервуара используются нейроны Курбажа–Некоркина — быстро-медленные отображения, подробно исследованные в первой главе диссертации в контексте анализа хаотических бёрстовых колебаний. Здесь существенна *концептуальная* связь: элементы резервуара обладают тем же типом быстро-медленной динамики, который был детально проанализирован в главе 1; однако конкретные параметры и режимы различаются: в главе 1 исследовались быстро-медленные хаотические аттракторы изолированного элемента, здесь — коллективная динамика ансамбля таких элементов в резервуарной архитектуре. Динамика отдельного нейрона задаётся двумерным отображением

$$\begin{cases} x_i(n+1) = x_i(n) + F(x_i(n)) - \beta\, H(x_i(n) - d) - y_i(n), \\ y_i(n+1) = y_i(n) + \varepsilon_i\,(x_i(n) - J_i(n)), \end{cases} \tag{3.8}$$

где $i = 1, \ldots, N$ — индекс элемента, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — дискретное время, x_i качественно описывает мембранный потенциал, y_i — восстанавливающая переменная, ответственная за суммарное действие ионных токов. Нелинейность $F(x) = x(x-a)(1-x)$ — кубическая; $H(\cdot)$ — функция Хевисайда, обеспечивающая пороговый механизм спайковой генерации через линию разрыва $x = d$. Параметр β контролирует амплитуду разрывного члена и тем самым возможность хаотической спайковой динамики: при $\beta = 0$ система демонстрирует только регулярные режимы, при $\beta > 0$ возникают хаотические спайк-подпороговые колебания.

Параметр $\varepsilon_i \ll 1$ задаёт разделение масштабов между быстрой (x) и медленной (y) переменными и контролирует собственную частоту i-го элемента. Параметр $J_i(n) = J_{\text{NS}} + J_i^{\text{cnct}}(n)$ включает бифуркационное значение $J_{\text{NS}} = (5/4 - (13/16 + 3\varepsilon)^{1/2})/3$, при котором неподвижная точка теряет устойчи-

вость через суперкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера, и вклад связей $J_i^{\text{cnct}}(n)$. При варьировании J изолированный нейрон проходит через последовательность режимов: состояние покоя ($J < J_{\text{NS}}$) $\rightarrow$ подпороговые колебания $\rightarrow$ хаотические спайк-подпороговые колебания $\rightarrow$ периодическая спайковая активность (рис. 3.7).

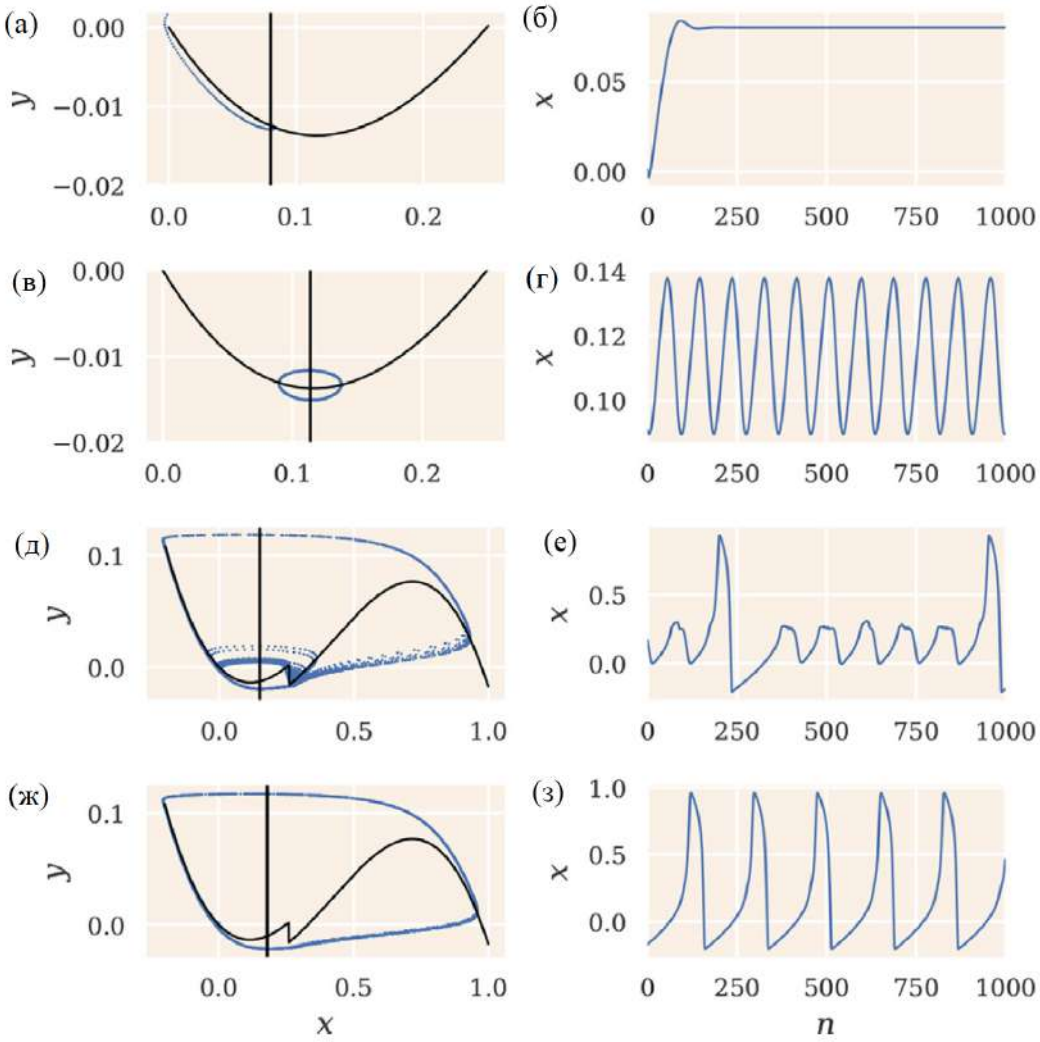

Рис. 3.7 – Основные динамические режимы изолированного нейрона Курбажа–Некоркина (3.8): фазовые портреты в плоскости (x, y) (левый столбец) и осциллограммы $x(n)$ (правый столбец). (а,б) возбудимость ($J = 0{,}08$); (в,г) подпороговые колебания ($J = 0{,}1138$); (д,е) хаотические спайк-подпороговые колебания ($J = 0{,}15$); (ж,з) периодическая спайковая активность ($J = 0{,}18$). Параметры: $\beta = 0{,}018$, $\varepsilon = 0{,}005$. Чёрные кривые — изоклины $x = J$ и $y = F(x) - \beta H(x - 0{,}26)$.

Архитектура дискретного резервуара. Связь между элементами осуществляется через синаптические переменные, определяемые двухкомпонентной синаптической моделью:

$$\begin{cases} r_j(n+1) = r_j(n) - r_j(n)/M_1 + h_j(n), \\ h_j(n+1) = h_j(n) - h_j(n)/M_2 + H(x_j(n) - x_{\text{peak}})/(M_1 M_2), \end{cases} \tag{3.9}$$

где x_{peak} — пороговое значение, $M_1 = 1{,}01$ и $M_2 = 1{,}95$ — параметры, определяющие временну́ю шкалу синаптического тока. Вектор $\mathbf{r} = [r_1, \ldots, r_N]^\top$ описывает нелинейно преобразованную активность элементов резервуара. Вместо двухкомпонентной модели синапса также используется стандартное преобразование $r_j = \tanh(x_j)$; оба варианта дают качественно согласованные результаты.

Эффективная матрица связей имеет вид

$$\Omega = g\,\Omega^0 + q\,\eta\phi^\top, \tag{3.10}$$

где $\Omega^0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — случайная разреженная матрица рекуррентных связей (элементы из нормального распределения $\mathcal{N}(0,\, 1/(pN^{1/2}))$, доля ненулевых элементов $p = 0{,}1$; фиксирована в процессе обучения), $\eta \in \mathbb{R}^N$ — случайный вектор весов обратной связи от выхода к элементам (равномерное распределение на $[-1, 1]$; фиксирован), $\phi \in \mathbb{R}^N$ — вектор весов считывающего слоя (подлежащий обучению). Коэффициент g контролирует силу рекуррентных связей и выбирается так, чтобы до обучения в сети реализовался режим хаотической динамики; коэффициент q контролирует силу обратной связи от выхода и обеспечивает подавление хаоса при обучении. Структура (3.10) полностью аналогична (3.4): фиксированная случайная часть плюс обучаемая низкоранговая добавка ранга 1. Обучение вектора ϕ проводится по алгоритму FORCE (рекурсивный метод наи-

меньших квадратов, п. 3.1.3).

Исследование пространства параметров. Целевой сигнал — гармоническая функция $x_{\text{out}}(n) = \sin(2\pi f_{\text{targ}}\, n\, \Delta t)$, где $\Delta t = 0{,}001$ — временно́й масштаб, а целевые частоты выбирались в диапазоне $f_{\text{targ}} \in [2, 20]$. Качество обучения оценивалось по L_2-норме ошибки, усреднённой по 20 реализациям.

1. Согласование собственной частоты и целевого сигнала (рис. 3.8). Двумерный анализ пространства $(\varepsilon, f_{\text{targ}})$ для однородной сети ($\varepsilon_i = \varepsilon$ для всех i) выявляет структуру, качественно аналогичную карте (τ, ω) для частотных нейронов (рис. 3.6): для каждого f_{targ} существует оптимальный интервал значений ε, а общая форма оптимальной области отражает принцип согласования временных масштабов. При малых ε (низкие собственные частоты) хорошее качество обучения достигается лишь для узкого диапазона целевых частот. При бóльших ε диапазон расширяется, однако целевые сигналы с низкими частотами становятся труднее воспроизводимыми, вплоть до нестабильностей обучения (пурпурная область на рис. 3.8).

2. Роль коэффициентов связи g и q. На плоскости (q, g) область успешного обучения ограничена снизу по обоим параметрам: при q ниже порогового значения обратная связь от выхода недостаточна для подавления хаотической активности резервуара; при малых g динамика сети не обладает достаточной сложностью для поддержки целевого сигнала. Режим работы изолированного элемента (периодические спайки или хаотические спайк-подпороговые колебания) не оказывает заметного влияния на размер оптимальной области в плоскости (q, g).

3. Роль хаотической спайковой динамики. Разрывный член $\beta H(x - d)$ в (3.8) ответственен за хаотическую генерацию спайков. При $\beta = 0$ возмож-

ны только регулярные режимы. В ходе исследования зависимости ошибки от β обнаружен неочевидный эффект: при $\beta \approx 0{,}1$ ошибка обучения снижается по сравнению с $\beta = 0$ для определённых интервалов ε. Хаотическая спайковая динамика, вопреки интуитивному ожиданию, может *улучшить* качество обучения, обеспечивая более широкое разнообразие откликов. Этот результат демонстрирует, что нелинейный разрывный элемент, привносящий хаотичность в динамику отдельного элемента, играет конструктивную роль в формировании коллективных вычислительных свойств.

4. Влияние размера сети. С ростом N ошибка обучения монотонно убывает: сначала резко (при малых N), затем — значительно медленнее. Эта закономерность сохраняется как для однородных, так и для гетерогенных сетей. При фиксированном N и фиксированной степени гетерогенности однородные сети могут демонстрировать меньшую ошибку для конкретной целевой частоты, однако гетерогенные сети обеспечивают лучшее качество обучения для более широкого диапазона f_{targ}.

Роль ε-гетерогенности. Для преодоления ограничений однородного резервуара исследованы два типа гетерогенности: равномерное распределение $\varepsilon_i \sim U(\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon/2,\ \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon/2)$ и нормальное $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\varepsilon_0, \varepsilon_{\text{std}}^2)$. Установлено, что с увеличением степени ε-гетерогенности (рост $\Delta\varepsilon$ или ε_{std}) интервал целевых частот с хорошим качеством обучения расширяется, а область нестабильностей сужается (рис. 3.9). Вместе с тем для фиксированной оптимальной частоты однородного случая абсолютное качество несколько снижается — плата за универсальность. Физическая интерпретация: гетерогенность расширяет базис собственных частот ансамбля, и система приобретает свойства широкополосного преобразователя — эффект, хорошо известный в радиотехнике при проектиро-

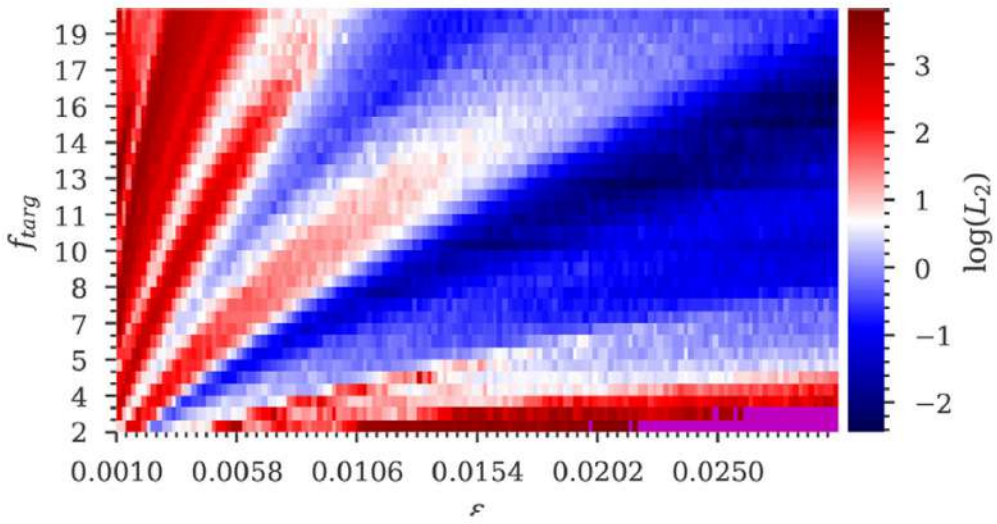

Рис. 3.8 – Логарифм L_2-нормы ошибки генерации (цветовая шкала) как функция параметра ε и частоты целевого сигнала f_{targ} для однородного резервуара на элементах Курбажа–Некоркина. Параметры: $N = 2000$, $\beta = 0{,}018$, $g = 0{,}04$, $q = 0{,}6$. Тёмно-синие области — успешное обучение ($\log(L_2) \ll 0$); тёмно-красные — неуспешное; пурпурным выделены нестабильности. Структура качественно аналогична рис. 3.6 для частотных нейронов.

вании многочастотных фильтров из элементов с рассогласованными параметрами.

3.1.6. Формирование упорядоченной коллективной активности при обучении

Один из результатов исследований состоит в том, что обучение *только* считывающего слоя приводит к глубокой перестройке коллективной активности резервуара — формированию упорядоченной пространственно-временно́й структуры динамики всей сети, несмотря на то что рекуррентные связи Ω^0 остаются неизменными. Этот процесс можно рассматривать как *самоорганизацию* в широком смысле — спонтанное возникновение макроскопического порядка из неупорядоченного состояния. Следует, однако, подчеркнуть, что в отличие от классической самоорганизации (например, в смысле Хакена [163]), где упорядоченные структуры формируются без внешнего управляющего воздействия,

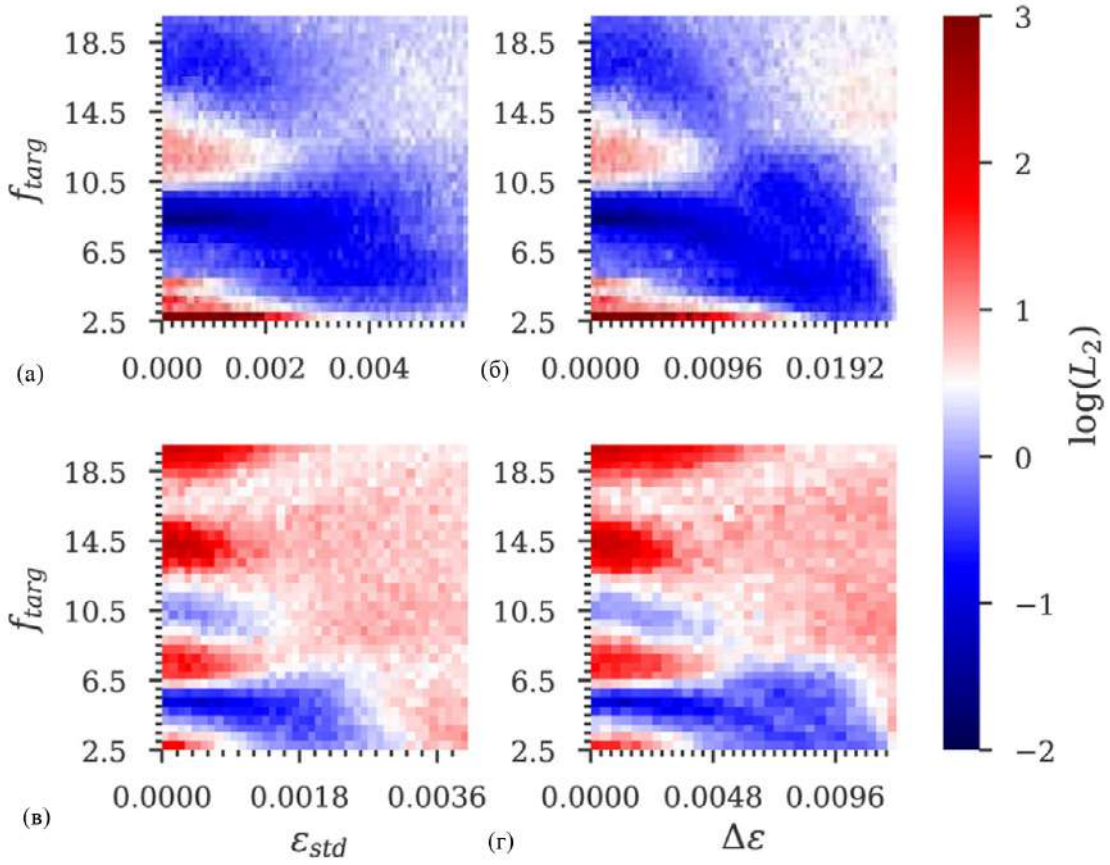

Рис. 3.9 – Влияние ε-гетерогенности на качество обучения. Логарифм L_2-нормы как функция степени гетерогенности и частоты целевого сигнала f_{targ}: (а,б) нормальное и равномерное распределения при $\varepsilon_0 = 0{,}012$; (в,г) то же при $\varepsilon_0 = 0{,}006$. С ростом гетерогенности синие области (успешное обучение) расширяются, красные (неуспешное) сужаются. Параметры: $N = 2000$, $g = 0{,}04$, $q = 0{,}6$, $\beta = 0{,}018$.

здесь процесс направляется внешним целевым сигналом через алгоритм обучения; тем не менее порядок возникает в *необучаемой* части системы (внутри резервуара), параметры которой не подвергаются прямой модификации. Механизм этой перестройки — низкоранговая обратная связь: изменение вектора ϕ модифицирует эффективную матрицу (3.10) и тем самым деформирует фазовое пространство системы.

До начала обучения рекуррентная случайная структура в сочетании с хаотической динамикой элементов порождает нерегулярную пространственно-временну́ю активность (рис. 3.11а): пространственно-временной беспорядок без выраженной пространственно-временно́й структуры. После успешного обучения динамика сети существенно модифицируется: наблюдается когерентная активность, согласованная с целевым сигналом.

Для визуализации коллективного поведения элементы упорядочиваются по фазам спайковой активности. В случае однородной сети ($\varepsilon_i = \varepsilon_0$ для всех i) на пространственно-временно́й диаграмме обученной сети выделяются несколько доменов (рис. 3.11б):

- два *антифазных кластера* синхронной спайковой активности, содержащих большинство элементов и обеспечивающих генерацию квазигармонического выходного сигнала;
- два малых домена со спайкующими элементами, фазы которых принимают промежуточные значения;
- малый домен элементов с некогерентной неспайковой активностью.

Эта доменная структура не задаётся извне и не закладывается в архитектуру сети, а возникает как результат обучения считывающего слоя. Примечательна параллель с доменными структурами, обнаруженными при анализе мульти-

плексных сетей в главе 2: там домены формировались спонтанно при межслойном взаимодействии, здесь — при адаптации выходных весов. В обоих случаях пространственно неоднородная структура возникает из однородного начального состояния, однако механизмы различны (адаптивная межслойная связь — в главе 2, низкоранговая обратная связь — здесь).

Индивидуальная динамика после обучения. На уровне отдельного элемента обучение приводит к переходу от хаотической активности к квазирегулярным колебаниям. Элементы, принадлежащие антифазным кластерам, демонстрируют квазипериодические релаксационные колебания, сходные с режимом периодической спайковой активности изолированного элемента (рис. 3.7ж,з); при этом элементы одного кластера синхронизованы синфазно, а элементы разных кластеров — антифазно. Элементы домена некогерентной неспайковой активности демонстрируют различные типы подпороговых колебаний. Разнообразие индивидуальной динамики обусловлено различием входов $J_i^{\text{cnct}}(n)$, получаемых каждым элементом от остальной части сети: при $J_i^{\text{cnct}}(n) < 0$ динамика определяется устойчивой неподвижной точкой; при $J_i^{\text{cnct}}(n) > 0$ элемент последовательно проходит через подпороговые, спайк-подпороговые и спайковые колебания.

Проекции на главные компоненты. Для визуализации глобальной динамики резервуара исследовались проекции многомерных фазовых траекторий на подпространство первых трёх главных компонент. До обучения проекция представляет собой случайную, но структурированную область. После обучения возникает устойчивая периодическая траектория, различные участки которой соответствуют определённым фазам целевого сигнала: локальным минимумам, мак-

симумам и пересечениям нуля. Формирование этой замкнутой траектории — прямое свидетельство рождения аттрактора в фазовом пространстве обученной сети.

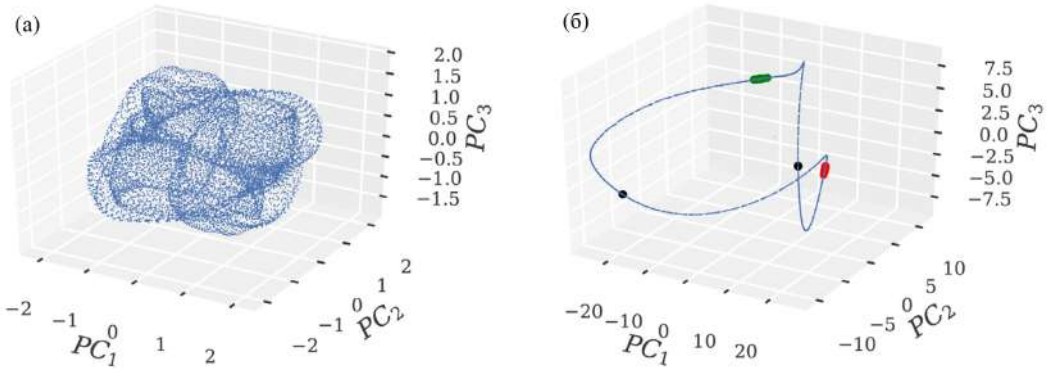

Рис. 3.10 – Проекции фазовых траекторий резервуара на подпространство первых трёх главных компонент: (а) до обучения — случайная структура; (б) после обучения — устойчивая периодическая траектория. Красные точки — локальные минимумы выходного сигнала $x_{\text{out}}(n)$, зелёные — максимумы, чёрные — пересечения нуля. Формирование замкнутой траектории свидетельствует о рождении аттрактора. Параметры: $g = 0{,}04$, $q = 0{,}6$, $N = 2000$, $\beta = 0{,}018$, $\varepsilon = 0{,}015$, $f_{\text{targ}} = 10$.

В случае контролируемой ε-гетерогенности, когда значения ε_i равномерно распределены со средним $\varepsilon_0 = 0{,}015$ и шириной $\Delta\varepsilon = 0{,}018$, коллективная структура качественно меняется (рис. 3.11в): вместо дискретных антифазных кластеров наблюдается *распространение* спайковой активности по большинству элементов сети — волноподобная структура, аналогичная бегущей волне возбуждения. Помимо этого, выделяется малый домен элементов, которые участвуют в распространении лишь эпизодически, и группа элементов с некогерентной неспайковой активностью. Гетерогенность параметров элементов расширяет базис собственных частот ансамбля и тем самым увеличивает диапазон целевых частот, доступных для успешного обучения. Этот результат демонстрирует, что введение контролируемого разброса параметров — стандартный приём повышения широкополосности в радиотехнических системах — эффективен и в

контексте резервуарных вычислений.

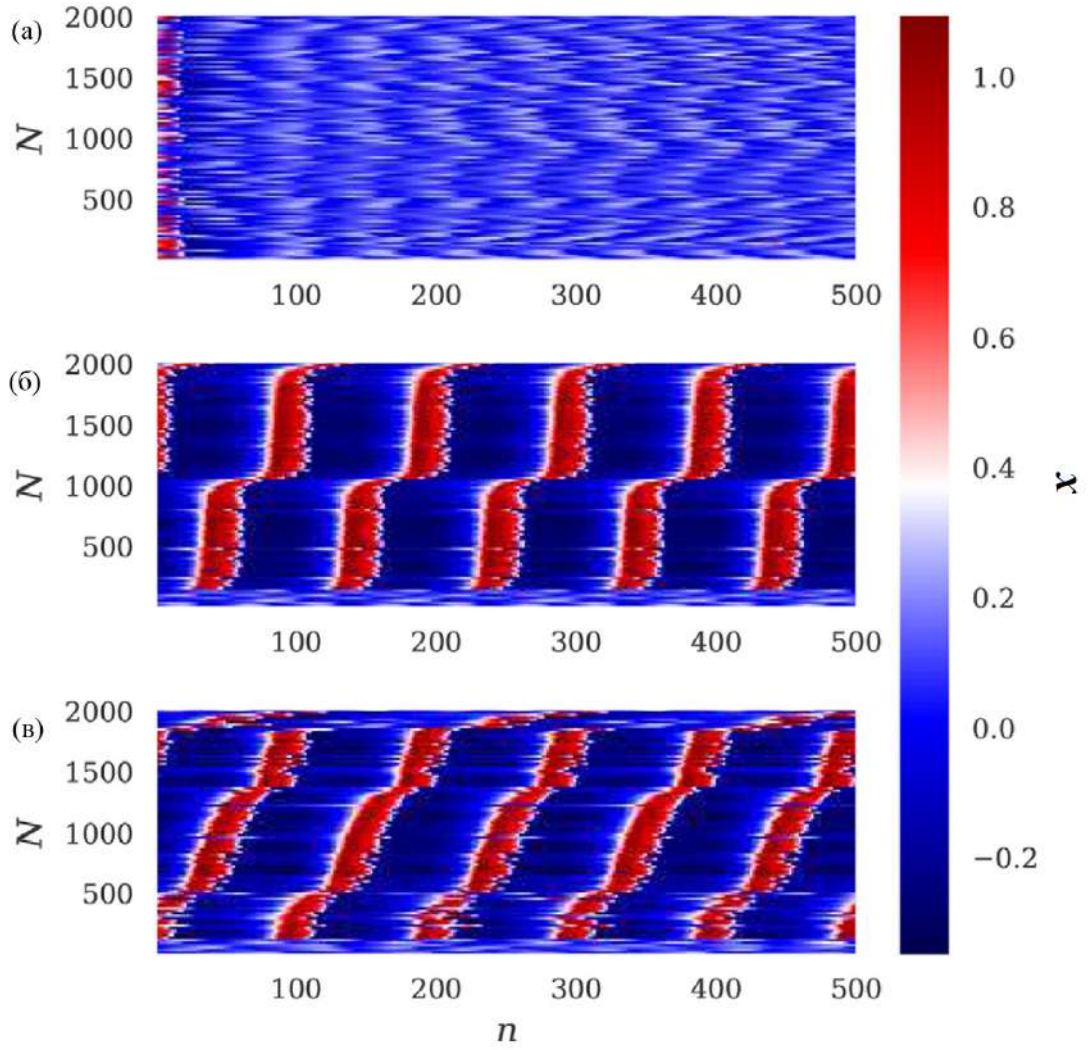

Рис. 3.11 – Пространственно-временна́я динамика $x_i(n)$ ($i = 1, \ldots, N$) в резервуаре на дискретных спайковых элементах Курбажа–Некоркина: (а) до обучения — пространственно-временной беспорядок; (б) после обучения в однородном случае ($\varepsilon_i = 0{,}015$) — антифазные кластеры синхронной спайковой активности, сформировавшиеся в результате обучения; (в) после обучения в гетерогенном случае с равномерным ε-распределением (среднее $\varepsilon_0 = 0{,}015$, ширина $\Delta\varepsilon = 0{,}018$) — волноподобное распространение спайковой активности. Элементы упорядочены по фазам спайков. Параметры: $g = 0{,}04$, $q = 0{,}6$, $N = 2000$, $\beta = 0{,}018$; $f_{\text{targ}} = 10$.

3.1.7. Генерация сложных пространственно-временных паттернов

Переход от простых гармонических целевых сигналов к сложным многомерным пространственно-временным паттернам позволяет исследовать меха-

низмы формирования автономных режимов в фазовом пространстве обученной сети. В качестве целевых паттернов используются коллективные режимы, возникающие в адаптивных сетях фазовых осцилляторов Курамото [94, 127].

Адаптивная сеть фазовых осцилляторов как источник целевых паттернов. Адаптивные сети [164] характеризуются взаимовлиянием состояний узлов и величины связей: динамика переменных узлов влияет на силу связей и наоборот. Это свойство отражает сложность взаимодействия узлов и связей во многих технологических, природных и социальных сетевых системах. Рассматривается адаптивная сеть $N = 100$ осцилляторов Курамото [43, 165, 166], фазовая динамика которых описывается системой

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_i}{dt} = \omega_0 - \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \kappa_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j + \alpha), \\ \dfrac{d\kappa_{ij}}{dt} = -\epsilon\big(\sin(\theta_i - \theta_j + \beta) + \kappa_{ij}\big), \end{cases} \tag{3.11}$$

где θ_i — фаза i-го осциллятора ($i = 1, \dots, N$), $\omega_0 = 1$ — собственная частота, κ_{ij} — сила связи от j-го к i-му осциллятору, α — фазовый сдвиг в функции связи, β — управляющий параметр адаптационной функции, а $\epsilon \ll 1$ — малый параметр, обеспечивающий медленную эволюцию связей по сравнению с фазовой динамикой. Начальные условия выбираются случайно: фазы — из равномерного распределения на $[0, 2\pi)$, связи — из равномерного распределения на $[-1, 1]$; этот выбор мотивирован существованием поглощающей области $G = \{(\theta_i, \kappa_{ij}) : \theta_i \in S^1,\ |\kappa_{ij}| \leq 1\}$ в фазовом пространстве системы.

После переходного процесса длительностью $T = 500$ единиц времени связи κ_{ij} достигают стационарных значений и фазовая динамика характеризуется определённым установившимся режимом. Как было показано в работах [94,

127], в зависимости от пары управляющих параметров (α, β) система (3.11) демонстрирует разнообразный репертуар пространственно-временных режимов: фазовую синхронизацию и пространственную некогерентность, бегущие волны, сложные мультикластерные состояния (где каждый кластер может содержать осцилляторы определённой частоты с упорядоченными фазами либо быть некогерентным), а также химерные конфигурации — структуры с сосуществованием когерентных и некогерентных доменов. В настоящей работе в качестве целевых паттернов используются три характерных режима:

1. *бегущие волны* ($\sigma = 0{,}3$, $\alpha = 0$) — простой паттерн с одной частотой и линейным профилем фаз;

2. *мультикластерное состояние* ($\sigma = 0{,}3$, $\alpha = -0{,}53$) — иерархическая структура с несколькими дискретными фазовыми группами;

3. *химера* ($\sigma = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}27$) — сосуществование когерентного и некогерентного доменов.

Преобразование фазовой динамики в целевые сигналы. Поскольку фазовая динамика разрывна (θ_i определена на окружности S^1), непосредственное использование фаз в качестве целевых выходов приводит к артефактам. Для однозначного представления угловых переменных применяется тригонометрическое преобразование: целевые сигналы формируются как пара $z_i(t) = \cos\theta_i(t)$ для $i = 1, \ldots, N$ и $z_i(t) = \sin\theta_{i-N}(t)$ для $i = N+1, \ldots, 2N$, что даёт $K = 2N = 200$ скалярных целевых выходов (рис. 3.1). После обучения фазовая динамика восстанавливается обратным преобразованием $\hat{\theta}_i(t) = \arctan(\hat{z}_{i+N}/\hat{z}_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Параметры и эффективность обучения. Резервуарные сети (нелинейные сети активных элементов) состоят из $M = 1000$ частотных нейронов (3.1). Элементы матрицы смежности $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ выбираются из гауссова распределения $\mathcal{N}(0,\, g^2/(pM))$ с параметрами $p = 0{,}1$, $g = 1{,}5$. Элементы матрицы обратной связи $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{M\times K}$ выбираются из равномерного распределения на $[-1, 1]$. Временна́я константа $\tau = 1$; шаг обновления весов $\Delta t = 0{,}02$; шаг интегрирования $\delta = 0{,}01$. Выходная матрица $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{M\times K}$ инициализируется нулями и модифицируется на каждом шаге Δt по алгоритму FORCE (3.7). После 1500 единиц модельного времени процедура обучения завершается: элементы W_{jk} стабилизируются вблизи стационарных значений, и резервуарная сеть становится автономной многомерной динамической системой с фиксированными весами. Следует отметить, что возмущающая часть эффективной матрицы $\mathbf{U}\mathbf{W}^\top$ не задаётся заранее, а формируется в процессе обучения: алгоритм FORCE последовательно модифицирует матрицу $\mathbf{W}$, и конечная структура возмущающей части определяется как совокупным действием алгоритма, так и конкретной реализацией фиксированных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{U}$.

Для количественной оценки эффективности обучения используются нормированная среднеквадратичная ошибка

$$\mathrm{NMSE} = \frac{\langle (\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t))^2 \rangle}{\langle \mathbf{z}^2(t) \rangle} \tag{3.12}$$

и усреднённые по времени параметры порядка

$$\langle R_k \rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^{N} e^{-ik\theta_j(t)} \right| dt, \quad k = 1, 2, \tag{3.13}$$

позволяющие верифицировать качественное соответствие между оригинальным паттерном и предсказанным выходом даже в случаях, когда точное совпадение

нарушается со временем (особенно для сложных режимов).

Результаты генерации. На рис. 3.12 представлены примеры режимов, воспроизводимых обученной сетью: бегущие волны, трёхкластерное состояние и химера. Для указанной длительности динамики пространственно-временны́е паттерны выхода сети и целевого сигнала визуально неразличимы, что свидетельствует о формировании аттрактора, воспроизводящего сложную пространственно-временну́ю структуру. Значения параметров порядка $\langle R_1 \rangle$ и $\langle R_2 \rangle$ подтверждают количественное соответствие.

3.1.8. Спектральный механизм формирования автономных режимов

Одно из важных наблюдений состоит в том, что после успешного обучения эффективный оператор сети приобретает *низкоранговую добавку*, которая создаёт спектральные выбросы в спектре эффективной матрицы связей и тем самым формирует низкоразмерную динамику на фоне высокоразмерной рекуррентной структуры. С позиции радиофизики этот механизм аналогичен *переходу через порог генерации мод* в многомодовом автогенераторе: обратная связь через выходной сумматор выводит определённые моды за пределы круга устойчивости, и именно эти моды определяют режим генерации.

Фиксированная часть матрицы смежности $\mathbf{A}$ при $g = 1{,}5 > 1$ порождает хаос в необученной сети. Собственные значения λ_i матрицы $\mathbf{A}$ распределены внутри круга радиуса g на комплексной плоскости в соответствии с круговым законом для разреженных случайных матриц (рис. 3.13, оранжевые точки). Обученная матрица $\mathbf{W}$, умноженная на матрицу обратной связи $\mathbf{U}$, добавляет низкоранговое возмущение к структуре связей, приводя к радикальному изменению сетевой активности. Эффективная матрица взаимодействия обученной

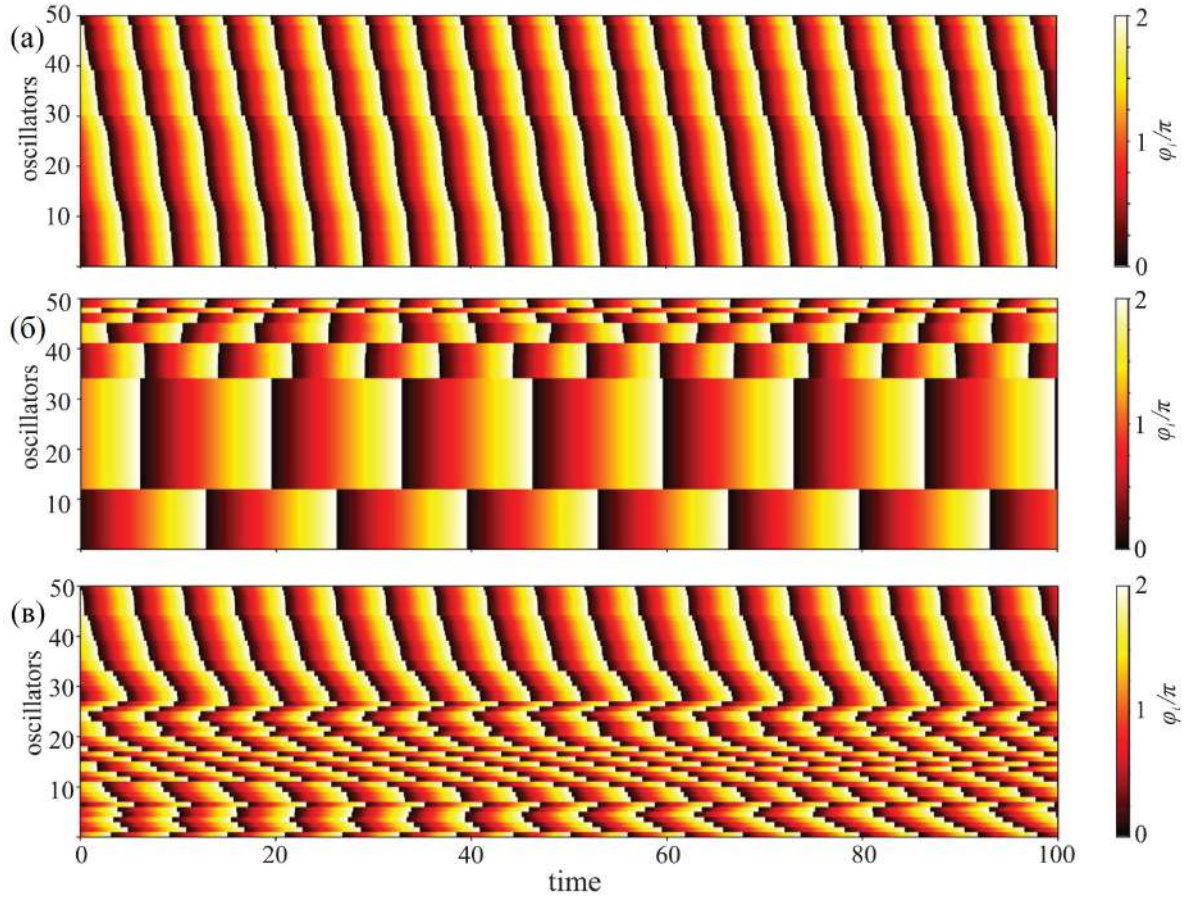

Рис. 3.12 – Пространственно-временна́я динамика фаз $\hat{\theta}_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, на выходе резервуарных сетей, обученных генерировать: (а) бегущие волны; (б) мультикластерные колебания; (в) химерное состояние. Целевые паттерны получены в адаптивной сети фазовых осцилляторов (3.11) для параметров: (а) $\sigma = 0{,}3$, $\alpha = 0$; (б) $\sigma = 0{,}3$, $\alpha = -0{,}53$; (в) $\sigma = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}27$. Цветовая шкала — значения фаз; горизонтальная ось — время, вертикальная — индекс выходного канала. Паттерны выхода обученных сетей визуально неразличимы от целевых, что свидетельствует о формировании автономных аттракторов.

сети имеет вид

$$\Omega = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}, \tag{3.14}$$

где второе слагаемое — матрица ранга, не превышающего K (размерность выходного пространства). Низкоранговые возмущения случайных матриц изучались в работах [160, 167]; динамика рекуррентных сетей с коррелированной низкоранговой структурой анализировалась в [161]. Принципиально новым результатом настоящего раздела является установление *прямой связи* между спектральными выбросами и формированием конкретных автономных режимов в обученной сети.

Множество собственных значений матрицы Ω, помимо подмножества внутри круга радиуса g, содержит группу нескольких выбросов — комплексно-сопряжённых значений λ_k^{out} с $|\lambda_k^{\text{out}}| > g$ (рис. 3.13а–в, синие точки). Число выбросов и их расположение в комплексной плоскости $(\operatorname{Re}\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda)$ усложняются с увеличением сложности целевого пространственно-временного паттерна:

- для бегущих волн (простой паттерн с одной частотой и линейным профилем фаз) — наименьшее число выбросов;
- для мультикластерного состояния (несколько дискретных фазовых значений) — промежуточное число выбросов;
- для химеры (сосуществование когерентных и некогерентных доменов) — наибольшее число выбросов с наиболее сложным расположением.

Мнимые части выбросов $\operatorname{Im}\lambda_k^{\text{out}}$ определяют доминирующие частоты автономного режима, а вещественные части $\operatorname{Re}\lambda_k^{\text{out}} > 0$ обеспечивают их неустойчивость относительно нулевого состояния — необходимое условие автогенерации. Число выбросов за пределами круга, таким образом, играет роль *числа ак-*

тивных мод генерации и определяет эффективную размерность автономного аттрактора.

Примечательно, что по-разному инициализированные резервуарные сети (различные реализации случайной матрицы **A**), обученные на одном и том же целевом паттерне, приводят к *одинаковым* спектральным выбросам матрицы Ω. Обученная низкоранговая добавка $\mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}$ компенсирует различия в фиксированной части: различные **A** порождают различные **W**, но возмущающая часть подбирается в ходе обучения так, чтобы выбросы Ω совпадали. Это свидетельствует о том, что спектральные выбросы — не случайный артефакт конкретной инициализации, а *инвариантная характеристика* решаемой задачи.

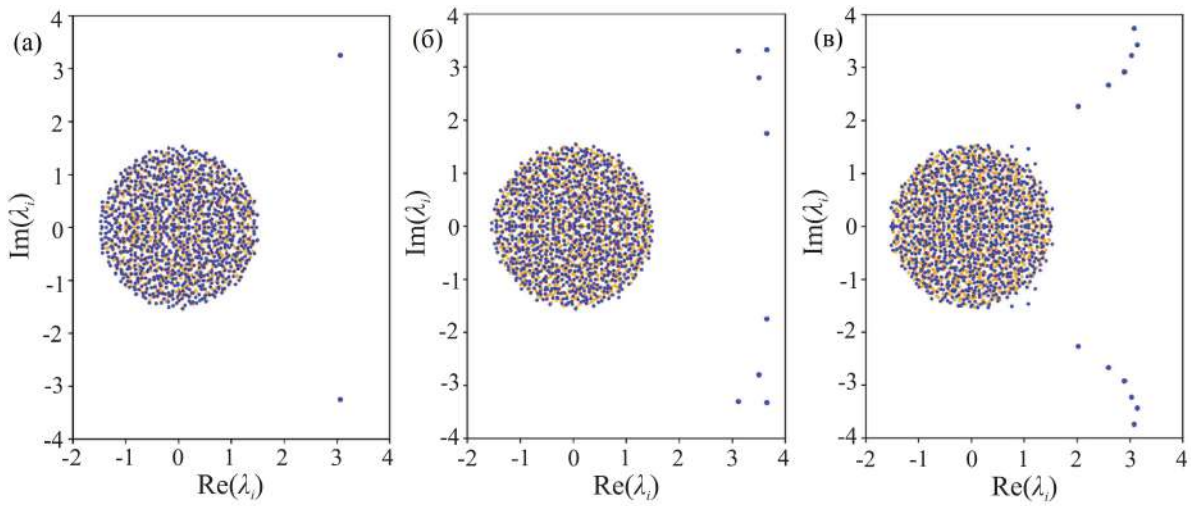

Рис. 3.13 – Спектры собственных значений на комплексной плоскости $(\mathrm{Re}\,\lambda,\ \mathrm{Im}\,\lambda)$ для трёх целевых пространственно-временных паттернов: (а) бегущие волны; (б) мультикластерное состояние; (в) химера. Оранжевые точки — собственные значения исходной случайной матрицы **A**, распределённые внутри круга радиуса $g = 1{,}5$. Синие точки — собственные значения эффективной матрицы $\Omega = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}$ после обучения; спектральные выбросы за пределами круга определяют доминирующие моды автономного режима. Число выбросов и сложность их расположения возрастают с увеличением сложности целевого паттерна — аналог перехода через порог генерации мод в многомодовом автогенераторе.

3.1.9. Микроскопическая динамика и вклад структуры обученных весов при генерации сложных паттернов

Спектральный анализ (п. 3.1.8) устанавливает связь между глобальной характеристикой эффективной матрицы Ω и сложностью генерируемого режима. Однако вопрос о том, *как именно* индивидуальная микроскопическая активность элементов и обученная структура весов формируют конкретные пространственно-временные паттерны, требует более детального анализа. В данном разделе этот вопрос решается посредством исследования парциальных фазовых портретов, распределений активностей и структурно-динамических вкладов.

Парциальные фазовые портреты. На рис. 3.14 представлены проекции высокоразмерной траектории на парциальные фазовые плоскости $(x_i, \dot{x}_i)$ для трёх случайно выбранных элементов резервуара при генерации каждого из трёх целевых режимов. Для бегущих волн (рис. 3.14а) парциальные кривые замкнуты и имеют гетерогенные амплитуды — от малых до больших. Это соответствует периодической динамике с одной частотой, которую описывает данный паттерн. Для мультикластерного состояния (рис. 3.14б) и химеры (рис. 3.14в) свойство гетерогенности амплитуд сохраняется, но кривые в общем случае не замкнуты и имеют более сложную структуру: основное вращение вокруг начала координат сопровождается малыми осцилляциями в направлении, ортогональном основному курсу. Для мультикластерного состояния такая внутривращательная вариабельность наблюдается для траекторий всех амплитуд; для химеры — преимущественно для траекторий малой амплитуды. Усложнение парциальных портретов коррелирует с ростом числа спектральных выбросов, установленным в п. 3.1.8.

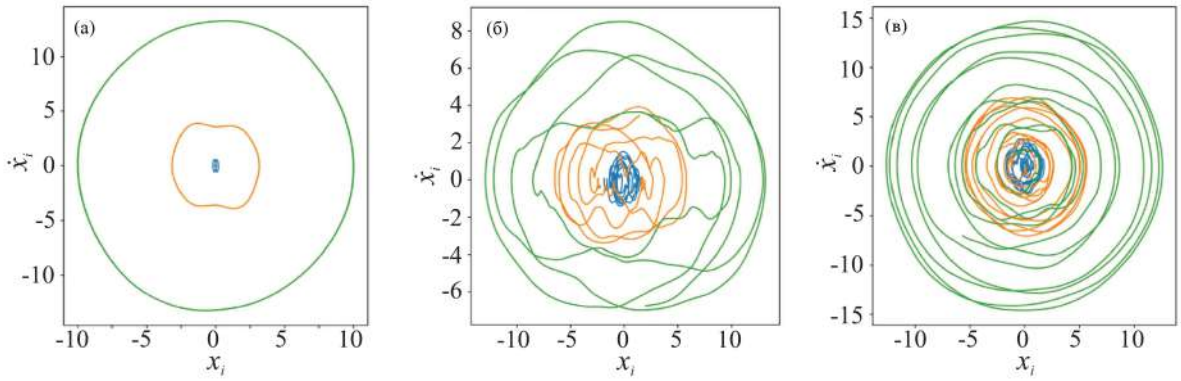

Рис. 3.14 – Парциальные фазовые портреты в плоскости $(x_i, \dot{x}_i)$ трёх различных элементов резервуара для трёх целевых пространственно-временных паттернов: (а) бегущие волны — замкнутые кривые гетерогенных амплитуд; (б) мультикластерное состояние — незамкнутые кривые с внутривращательными осцилляциями; (в) химера — осцилляции преимущественно для малоамплитудных траекторий. Усложнение парциальных портретов коррелирует с числом спектральных выбросов (рис. 3.13).

Распределения индивидуальных активностей. Для получения полной картины перестройки внутрирезервуарной динамики в результате обучения на рис. 3.15 представлены функции плотности вероятности переменных $x_i(t)$ для всех $M = 1000$ элементов, упорядоченных по возрастанию стандартного отклонения $\mathrm{std}(x_i)$.

Для бегущих волн (рис. 3.15а) наблюдаются симметричные x-распределения для каждого элемента с характерными пиками на краях — следствие замедления траекторий вблизи минимальных и максимальных значений, типичного для квазигармонических колебаний. Диапазон стандартных отклонений охватывает несколько порядков.

Мультикластерный режим (рис. 3.15б) характеризуется меньшим различием между максимальным и минимальным стандартными отклонениями. Пиков на краях не наблюдается; вместо них — локальные максимумы, гетерогенно распределённые внутри интервалов x_i-динамики. Только для траекторий с наибольшей дисперсией наблюдается снижение вероятности посещения области вблизи $x = 0$, что связано с подобием этих траекторий квазигармоническим

кривым предыдущего случая.

Для химеры (рис. 3.15в) распределения x_i наиболее однородны; различие между наибольшим и наименьшим стандартными отклонениями невелико. Траектории в этом случае огибают начало координат, покрывая весь диапазон радиусов, а не ограничиваясь определённой полосой.

Таким образом, иерархия сложности целевых паттернов (бегущие волны $\rightarrow$ мультикластер $\rightarrow$ химера) систематически отражается в уменьшении упорядоченности распределений — от высокосимметричных бимодальных до квазиоднородных, — что согласуется с усложнением спектральной структуры Ω.

Структура обученных весов. Помимо динамики, существенный вклад в формирование выходных паттернов вносят обученные веса W_{jk}, проектирующие активность j-го элемента на k-й выход. На рис. 3.16 представлены все K весов для каждого из M элементов, упорядоченных в том же порядке, что и на рис. 3.15 — по возрастанию стандартного отклонения активности.

Для бегущих волн (рис. 3.16а) разброс весов относительно невелик; экстремальные веса имеют соседей с меньшими абсолютными значениями. Для мультикластерного состояния (рис. 3.16б) и химеры (рис. 3.16в) разброс весов существенно шире для элементов с малой дисперсией активности и у́же для элементов с большой дисперсией. Максимальные и минимальные веса для отдельных элементов изолированы, а бóльшая часть значений сосредоточена вблизи нуля.

Обнаруженная тенденция — *убывание дисперсии весов с ростом дисперсии активности* — присутствует во всех трёх режимах, хотя выражена наиболее отчётливо для мультикластерного состояния и химеры. Это свидетельствует о *компенсаторном механизме*: динамическая вариабельность (в форме

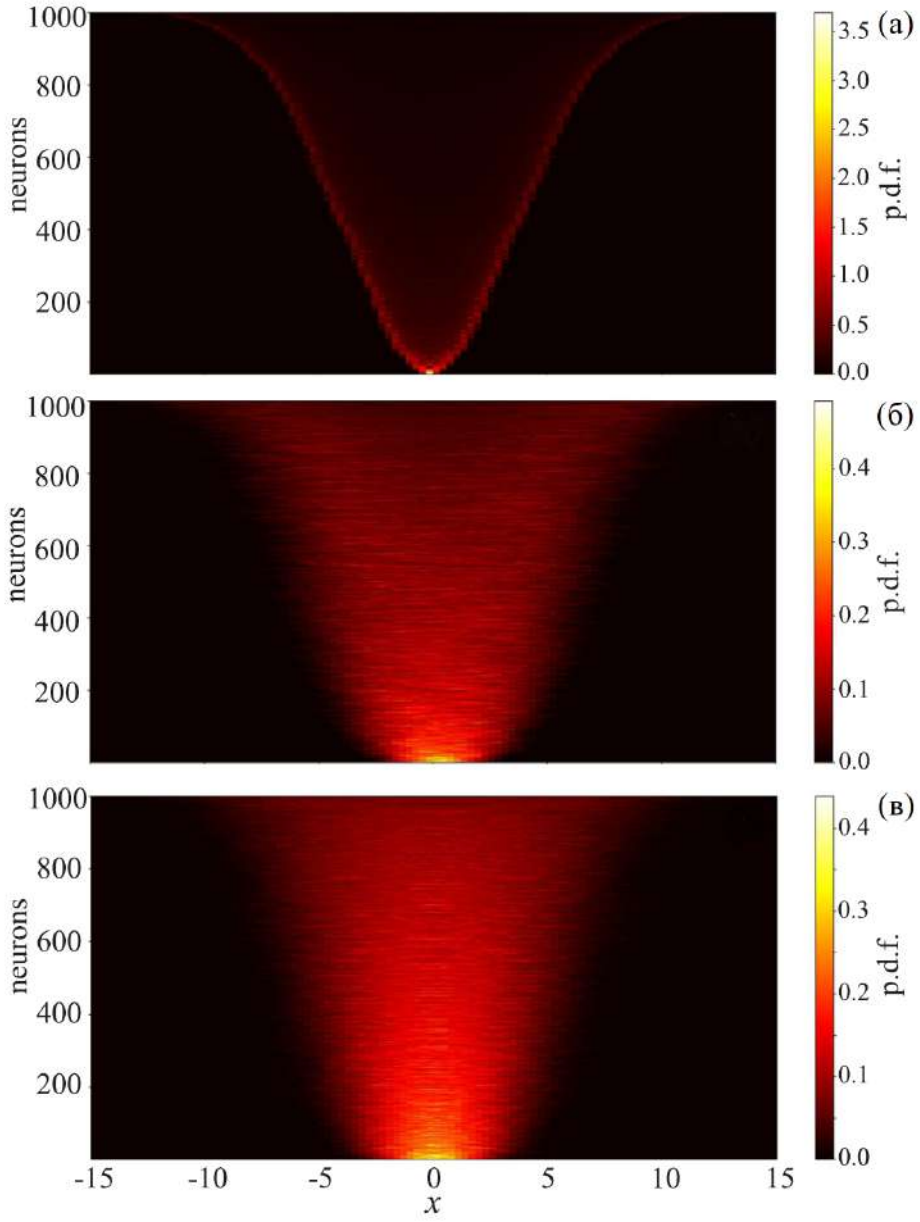

Рис. 3.15 – Распределения индивидуальных активностей $x_i(t)$ для $M = 1000$ элементов резервуара при генерации трёх целевых паттернов: (а) бегущие волны — симметричные бимодальные распределения с широким разбросом дисперсий; (б) мультикластер — промежуточная картина с неоднородными локальными максимумами; (в) химера — квазиоднородные распределения с малым различием дисперсий. Элементы упорядочены по возрастанию стандартного отклонения $x_i(t)$. Цвет кодирует вероятность нахождения в данном значении x.

распределений активностей) компенсируется структурной вариабельностью (в форме распределений соответствующих выходных весов), и наоборот. Элементы с большой амплитудой колебаний проектируются на выходы с умеренными весами; элементы с малой амплитудой — с экстремальными.

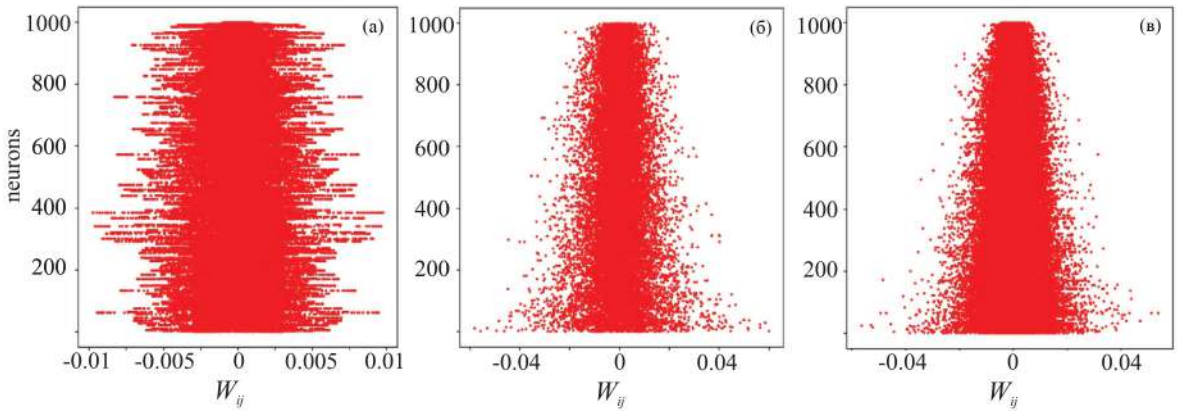

Рис. 3.16 – Веса выходной матрицы W_{jk}, связывающие отдельные элементы резервуара ($j = 1, \ldots, M$) с выходными элементами ($k = 1, \ldots, K$), после обучения для трёх целевых паттернов: (а) бегущие волны; (б) мультикластер; (в) химера. Элементы упорядочены по возрастанию стандартного отклонения x-активности. Отчётливо видна обратная зависимость: разброс весов убывает с ростом дисперсии активности, что указывает на компенсаторный механизм структура–динамика.

Мультипликативные вклады структуры и динамики. Для более глубокого понимания принципов генерации сложных паттернов вычислен мультипликативный вклад каждого элемента в каждый выход:

$$c_{jk}(t) = W_{jk}\, r_j(t), \quad j = 1, \ldots, M, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{3.15}$$

Выходной сигнал $\hat{z}_k(t) = \sum_{j=1}^{M} c_{jk}(t)$ формируется как сумма всех таких вкладов. На рис. 3.17 представлены стандартные отклонения c_{jk} для всех пар (j, k), где выходы упорядочены в соответствии с фазовой динамикой — по средней частоте и, внутри каждого частотного кластера, по возрастанию фаз. Элементы упорядочены, как и ранее, по дисперсии активности.

Результаты демонстрируют сложной влияние различных элементов на формирование выходных паттернов. Характерные формы вкладов структуры и динамики различаются между режимами, отражая специфику каждого: для бегущих волн — сравнительно однородные вклады; для мультикластерного состояния — чёткая блочная структура, соответствующая частотным кластерам; для химеры — промежуточная картина с выраженной зоной некогерентных вкладов.

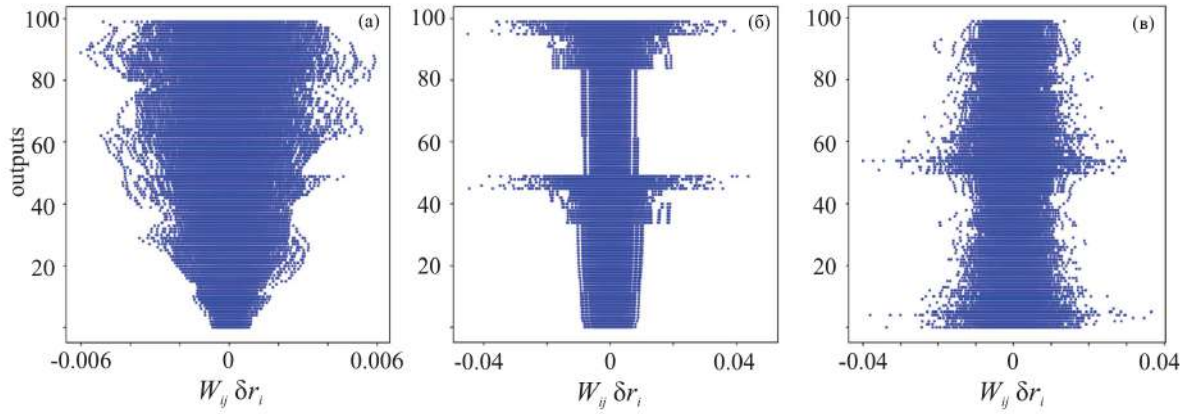

Рис. 3.17 – Мультипликативные вклады структуры и динамики: стандартные отклонения произведений $W_{jk}\,r_j(t)$, характеризующие вклад j-го элемента ($j = 1, \ldots, M$; ось ординат) в k-й выход ($k = 1, \ldots, K$; ось абсцисс), для трёх целевых паттернов: (а) бегущие волны; (б) мультикластер; (в) химера. Выходы упорядочены в соответствии с фазовой динамикой целевого паттерна. Блочная структура вкладов отражает кластерную организацию целевого режима.

3.1.10. Выводы

Результаты раздела показывают, что обучение методом FORCE сводится к низкоранговой модификации эффективной матрицы связей $\Omega = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^\top$, формирующей автономный аттрактор, воспроизводящий целевой пространственно-временной паттерн. Механизм раскрыт на трёх уровнях: спектральном (выбросы за пределами круга собственных значений в спектре изначальной матрицы), динамическом (парциальные фазовые портреты и распределения активностей) и структурном (компенсаторное соотношение между дисперсиями весов и ам-

плитудами колебаний). В отличие от работ [21, 22], в которых резервуар рассматривался как «чёрный ящик», здесь установлена прямая связь спектральных выбросов с формированием конкретных пространственно-временных режимов и получена карта эффективности обучения на плоскости параметров (τ, ω) с гиперболическим законом $\tau_{\text{opt}} \sim 1/\omega$. Качественное совпадение результатов для непрерывных частотных нейронов и дискретных спайковых отображений Курбажа–Некоркина свидетельствует о том, что установленные закономерности являются свойствами резервуарной архитектуры как таковой. Вместе с тем все результаты раздела относятся к задаче *автономной генерации* — формирования аттрактора в замкнутом контуре обратной связи. В следующем разделе рассматривается альтернативный механизм: *вычисления на непритягивающих переходных траекториях*, при которых сеть реализует функцию не как асимптотически устойчивый режим, а как управляемый маршрут конечной длительности в фазовом пространстве, индуцируемый внешним стимулом.

3.2. Индуцированная стимулом динамика в резервуарных сетях

Предыдущий раздел посвящён аттракторному механизму реализации функциональности: обучение методом FORCE формирует устойчивое инвариантное множество — аттрактор, на котором сеть автономно воспроизводит целевую динамику после отключения обучающего сигнала. Такой механизм обеспечивает высокую устойчивость воспроизведения, однако подразумевает, что функциональный режим существует как притягивающее состояние — он, образно говоря, «всегда включён» в фазовом пространстве сети.

Настоящий раздел посвящён принципиально иному механизму: *вычислениям на непритягивающих переходных траекториях*, индуцируемых внешним стимулом. В этом случае полезная динамика не обязана соответствовать ат-

трактору; напротив, она реализуется как временна́я последовательность состояний, возникающая в ответ на входной сигнал и затухающая после завершения вычисления. С позиции радиофизики это — импульсный отклик нелинейной системы: сложная динамика конечной длительности, возникающая после кратковременного воздействия и несущая функционально значимую информацию. Такой режим концептуально связан с результатами первой главы диссертации о переходном хаосе: сложная динамика конечной длительности может служить функциональным ресурсом, если её продолжительность управляется внешним воздействием. Однако подчеркнём, что здесь используется другая модель и другой механизм управления — связь концептуальная, а не содержательная.

Генерация последовательных паттернов — повсеместная функция многих нейронных систем, ответственных за широкий спектр функций, включая моторный контроль, принятие решений и рабочую память [168]. Структура динамических объектов, ответственных за сетевые вычисления последовательного типа, охватывает обширные области фазового пространства, поэтому локальный анализ (линеаризация в окрестности неподвижных точек) здесь неприменим — требуется нелокальный нелинейно-динамический подход.

3.2.1. Введение и постановка задачи

Динамические механизмы, лежащие в основе вычислений в рекуррентных нейронных сетях, активно исследуются с позиции теории динамических систем [27, 101, 153]. Анализ обученных сетей с позиции теории динамических систем позволил идентифицировать такие понятия, как неподвижные точки и линейные аттракторы [24, 26], сёдла [169], детерминированный хаос [12, 170], в качестве вычислительных примитивов. Задача устойчивой генерации временны́х паттернов в хаотических сетях исследовалась в [171]. Однако большинство

этих исследований были сосредоточены на локальном анализе фазового пространства [15, 161, 169, 172, 173] или условиях подавления хаоса [12, 170].

Мало изученным остается вопрос о *нелокальной* структуре фазового пространства при реализации стимул-индуцированных последовательностей: какие именно объекты — аттракторы, метастабильные состояния, переходные траектории — формируются при обучении в зависимости от типа задачи, и как они сосуществуют в одной архитектуре? В данном разделе систематически сопоставляются два механизма (аттракторный и переходный) в рамках единой резервуарной системы с обучением FORCE, что позволяет установить качественные различия между ними на языке показателей Ляпунова, проекций на главные компоненты и анализа устойчивости.

3.2.2. Архитектура системы

Рассматриваемая система (рис. 3.18) состоит из рекуррентной сети, содержащей N нейронов частотного типа (переменная состояния x_i описывает усреднённую активность i-го элемента, а нелинейное преобразование $r_i = \tanh(x_i)$ играет роль средней частоты активности), L входных элементов и M выходных каналов. Динамика системы описывается уравнениями

$$\tau \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{U}\mathbf{z} + \mathbf{V}\mathbf{y}, \tag{3.16}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ — вектор состояний нейронов рекуррентной сети, $\mathbf{r}(t) = \tanh(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^N$ — вектор нелинейных откликов (в частотной модели нейрона значение $r_i = \tanh(x_i)$ интерпретируется как средняя частота активности i-го элемента), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^L$ — вектор входных стимулов, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^\top \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^M$ — вектор выходных сигналов. Матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ (рекуррентные связи, гауссово распределение с ну-

левым средним и стандартным отклонением $g(pN)^{-1/2}$, $g = 1{,}5$, $p = 0{,}1$), $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N\times L}$ (входные связи) и $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ (обратная связь от выходов) фиксированы; элементы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ выбираются из равномерного распределения на $[-1, 1]$. Обучению подвергается только матрица $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ по алгоритму FORCE (п. 3.1.3). Параметры: $\tau = 0{,}01$, $\alpha = 1$, $\Delta t = 2$ мс.

Подставляя выражение для $\mathbf{z}$ в (3.16), получаем

$$\tau\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \underbrace{\left(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}\right)}_{\Omega}\,\mathbf{r} + \mathbf{V}\mathbf{y}, \tag{3.17}$$

где $\Omega = \mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}$ — эффективная матрица связей, та же структура, что и в (3.4). Принципиальное отличие от архитектуры раздела 3.1 состоит в наличии нетривиального входного сигнала $\mathbf{V}\mathbf{y}(t)$, который не отключается после завершения обучения и используется для управления динамикой сети в рабочем режиме. Входные стимулы представляют собой короткие прямоугольные импульсы амплитудой 1 и длительностью 50 мс, подаваемые от различных источников.

Целевые функции строятся как последовательности активаций: каждый выходной элемент k ($k = 1, \ldots, M$) в заданный момент генерирует импульс в форме положительной полуволны синусоиды амплитудой 1 и частотой 2 Гц, после чего активируется следующий элемент [155]. Система должна научиться генерировать последовательность из D таких активаций.

Исследуются три класса задач возрастающей сложности:

1. *Автономная генерация последовательностей*: после обучения система воспроизводит заданную циклическую последовательность $D = 10$ активаций $M = 5$ выходных элементов без внешних стимулов ($\mathbf{y} = \mathbf{0}$). Это — аттракторная задача, аналогичная рассмотренной в предыдущем разделе.

2. *Дискриминация входных импульсов*: короткий импульс от j-го входного

элемента ($j = 1, \ldots, L = 5$) должен вызвать ответ длительностью 250 мс только у j-го выходного элемента ($M = 5$). Входные импульсы подаются в случайном порядке.

3. *Переключение между последовательностями*: импульс от j-го входного элемента ($L = 3$) запускает определённую последовательность из $D = 6$ активаций $M = 3$ выходных элементов; импульсы от разных входов — разные последовательности.

Обучение проводится предъявлением целевых паттернов (около 10 повторений для задачи 1, около 100 — для задач 2 и 3) с одновременной модификацией **W** по алгоритму FORCE. После стабилизации весов система переходит в режим тестирования с фиксированными параметрами.

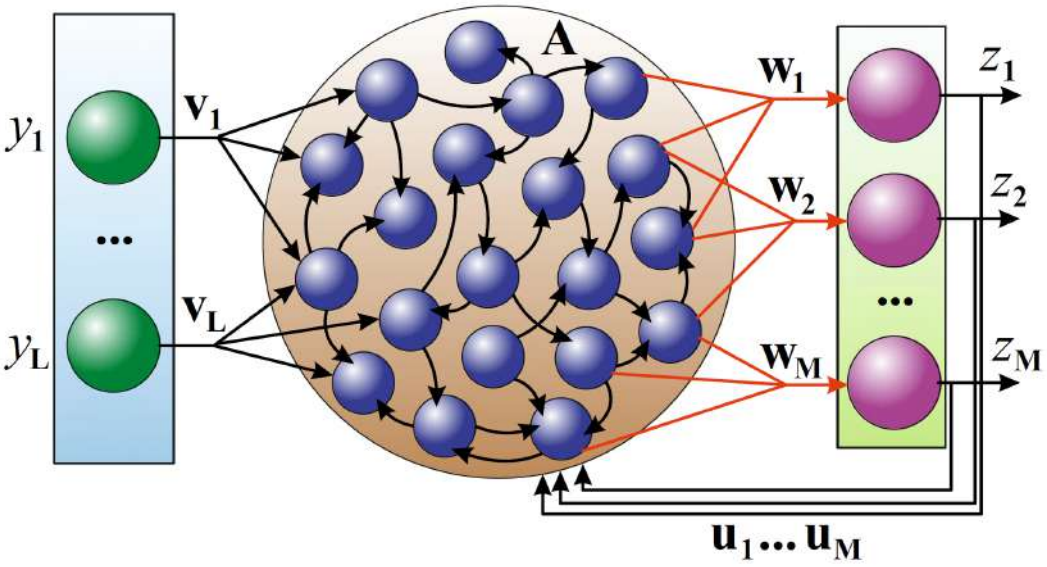

Рис. 3.18 – Архитектура системы для реализации стимул-индуцированной последовательной активности. Центральный элемент — рекуррентная сеть из N нейронов с матрицей связей **A**. Входные элементы y_j ($j = 1, \ldots, L$) подают стимулы через векторы $\mathbf{v}_j$. Выходные элементы z_k ($k = 1, \ldots, M$) формируются через обучаемые векторы $\mathbf{w}_k$, подвергаемые модификации. Обратная связь от выходов к сети — через фиксированные векторы $\mathbf{u}_k$. Цель обучения — сделать выходы z_k воспроизводящими целевые функции f_k.

3.2.3. Автономная генерация: аттракторный механизм

Для задачи автономной генерации последовательностей ($\mathbf{y} = \mathbf{0}$) обучение приводит к формированию *устойчивого предельного цикла* в N-мерном фазовом пространстве, на котором реализуется целевая последовательность активаций выходных элементов. Этот результат полностью согласуется со спектральным механизмом, описанным в п. 3.1.8: низкоранговая поправка $\mathbf{U}\mathbf{W}^\top$ к матрице $\mathbf{A}$ подавляет исходный хаос и формирует устойчивый режим.

На рис. 3.19 представлены результаты обучения сети из $N = 1000$ нейронов с $M = 5$ выходными элементами и целевым паттерном из $D = 10$ последовательных активаций. Пространственно-временна́я активность $x_i(t)$ 100 случайно выбранных нейронов (рис. 3.19а) высоко коррелирована с выходной активностью (рис. 3.19б): локальные экстремумы $x_i(t)$ достигаются в моменты пиков $z_k(t)$, что свидетельствует о том, что высокоразмерная динамика рекуррентной сети поддерживает низкоразмерную активность выходного слоя.

Проекция N-мерной траектории на подпространство трёх главных компонент (рис. 3.19в) обнаруживает замкнутую устойчивую кривую — предельный цикл. Структура цикла отражает выходной паттерн: активация конкретного выходного элемента ассоциирована с посещением определённой области фазового пространства (цветные звёзды на рис. 3.19в). Нормы выходных векторов $\|\mathbf{w}_k\|$ быстро стабилизируются в ходе обучения (рис. 3.19г).

Подтверждение устойчивости показателями Ляпунова. Для количественной верификации устойчивости предельного цикла вычислены показатели Ляпунова по алгоритму Бенеттина [54]: отслеживается эволюция четырёх малых ортогональных возмущений вдоль N-мерной траектории. Результат (рис. 3.19д): старший показатель Ляпунова $\lambda_1 = 0$ (характерно для движения на предельном

цикле), остальные — отрицательны ($\lambda_2 \approx -0{,}85$, $\lambda_3 \approx -0{,}85$, $\lambda_4 \approx -1{,}7$), что подтверждает орбитальную устойчивость цикла.

Устойчивость к прореживанию весов. Для оценки того, какая доля нейронов в обученной сети необходима для воспроизведения целевого поведения, проведено систематическое прореживание: из выходных векторов $\mathbf{w}_k$ последовательно удалялась доля h_0 элементов, начиная с наименьших по модулю. Нормированная среднеквадратичная ошибка

$$E = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \frac{\langle (z_k(t) - f_k(t))^2 \rangle}{\langle f_k^2(t) \rangle} \tag{3.18}$$

монотонно растёт с h_0 (рис. 3.19е), однако качество генерации остаётся приемлемым даже при удалении значительной доли связей: выходные элементы, ответственные за генерацию пиков, производят несовершенные, но отчётливо различимые информативные импульсы.

3.2.4. Дискриминация входов: регуляризация хаоса внешним стимулом

Для задачи дискриминации входных импульсов система демонстрирует принципиально иное поведение. После обучения ($\sim$100 предъявлений входных импульсов в случайном порядке) сеть корректно отвечает на случайно поступающие стимулы: импульс от j-го входного элемента вызывает ответ длительностью 250 мс только у j-го выходного элемента (рис. 3.20б).

Пространственно-временна́я активность $x_i(t)$ (рис. 3.20а) обнаруживает характерную структуру. Для визуализации нейроны упорядочены не случайно, а специфическим образом: для каждого выходного элемента k из рекуррентной сети выбираются 100 нейронов с наибольшими нормами соответствующих весов $|w_{ik}|$, упорядоченных по убыванию. На диаграмме видны пять групп нейро-

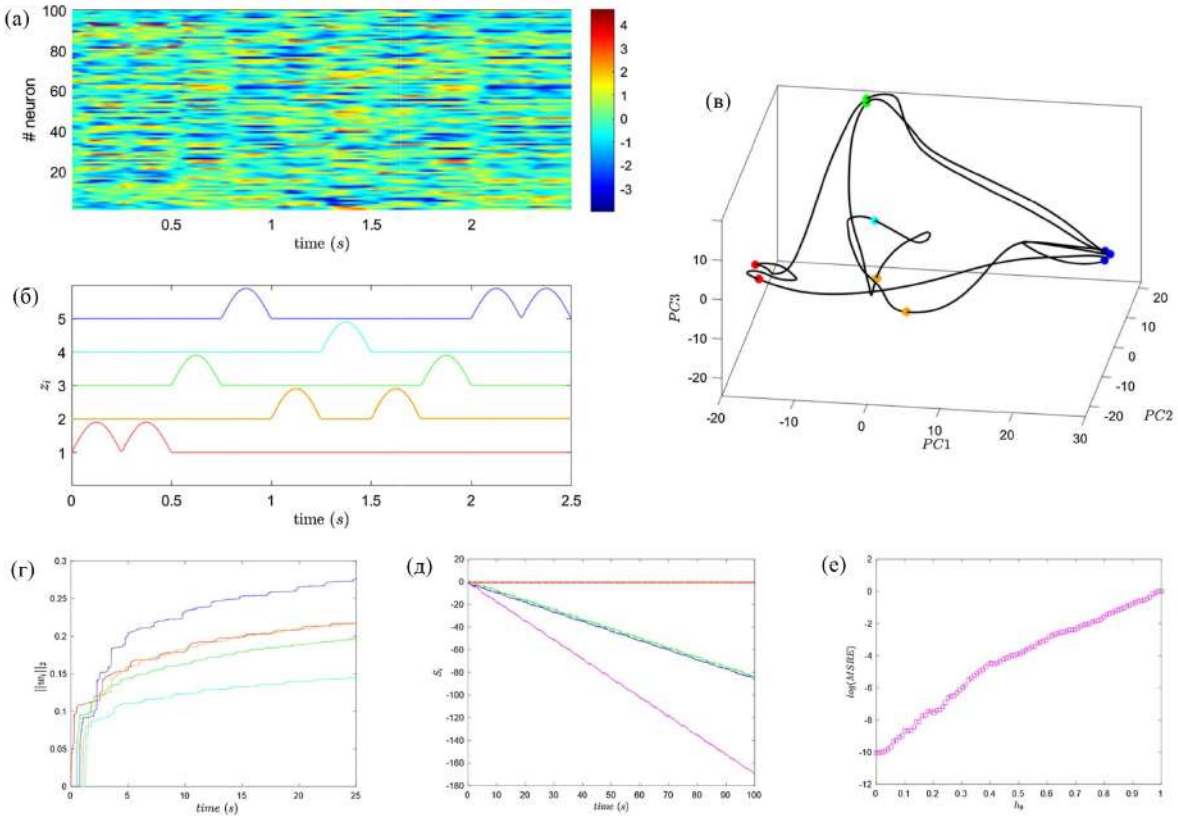

Рис. 3.19 – Автономная генерация последовательности в сети из $N = 1000$ нейронов с $M = 5$ выходными элементами и $D = 10$ активациями. (а) Пространственно-временна́я активность $x_i(t)$ 100 случайно выбранных нейронов. (б) Активность выходных элементов $z_k(t)$, воспроизводящих целевой паттерн. (в) Проекция траектории на три главные компоненты; цветные звёзды — моменты пиков активности соответствующих выходных элементов. (г) Эволюция норм выходных векторов $\|\mathbf{w}_k\|$ в ходе обучения. (д) Эволюция сумм логарифмов норм четырёх ортогональных возмущений (алгоритм Бенеттина); наклоны дают оценки показателей Ляпунова ($\lambda_1 = 0$). (е) Логарифм нормированной ошибки (3.18) как функция доли h_0 удалённых выходных весов.

нов с коррелированной активностью, в которых синхронные всплески появляются при активации соответствующих выходных элементов в ответ на входные импульсы. Такая динамика может быть интерпретирована как *блуждающая химера* [174, 175]: последовательно возникающие когерентные группы нейронов, поддерживающие активацию различных выходных элементов, сменяют друг друга, в то время как остальные нейроны остаются некогерентными.

Хаотический фон и регуляризация стимулом. Принципиальное отличие от автономного случая состоит в следующем. Проекция N-мерной траектории на подпространство главных компонент (рис. 3.20в, чёрная кривая) показывает, что при стимуляции от всех входов области фазового пространства, посещаемые после импульсов от различных входных элементов, чётко разделены (цветные кривые — проекции при стимуляции только отдельных входов). Однако *в отсутствие входных импульсов* динамика системы остаётся хаотической: старший показатель Ляпунова положителен ($\lambda_1 = 2{,}4$ в представленном примере). Таким образом, обучение *не подавляет* хаос полностью, а формирует в фазовом пространстве метастабильные области, которые активируются внешними стимулами. Роль периодических коротких импульсов — *регуляризация хаотической динамики*: стимулы выталкивают траекторию из хаотической области на детерминированные переходные маршруты.

Группы функционально значимых нейронов. Для выяснения того, какая часть нейронов наиболее ответственна за активацию конкретных выходных элементов, проведён следующий эксперимент: входной импульс подаётся не через исходный вектор $\mathbf{v}_j$, а только на $n \ll N$ нейронов с наибольшими $|w_{ik}|$ для некоторого выхода k, со знаками, соответствующими знакам w_{ik}. Результат (рис. 3.20г): стимуляция лишь 5% нейронов от общей популяции приводит к генерации ответов, качественно сходных с целевыми. Это свидетельству-

ет о формировании в ходе обучения специфических функционально значимых групп — относительно небольших наборов нейронов, избирательно ответственных за каждый выходной элемент.

Устойчивость к прореживанию. Удаление до 30% наименьших выходных весов практически не влияет на качество; даже при удалении до 80% слабейших связей последовательная активность выходных элементов остаётся различимой (рис. 3.20д).

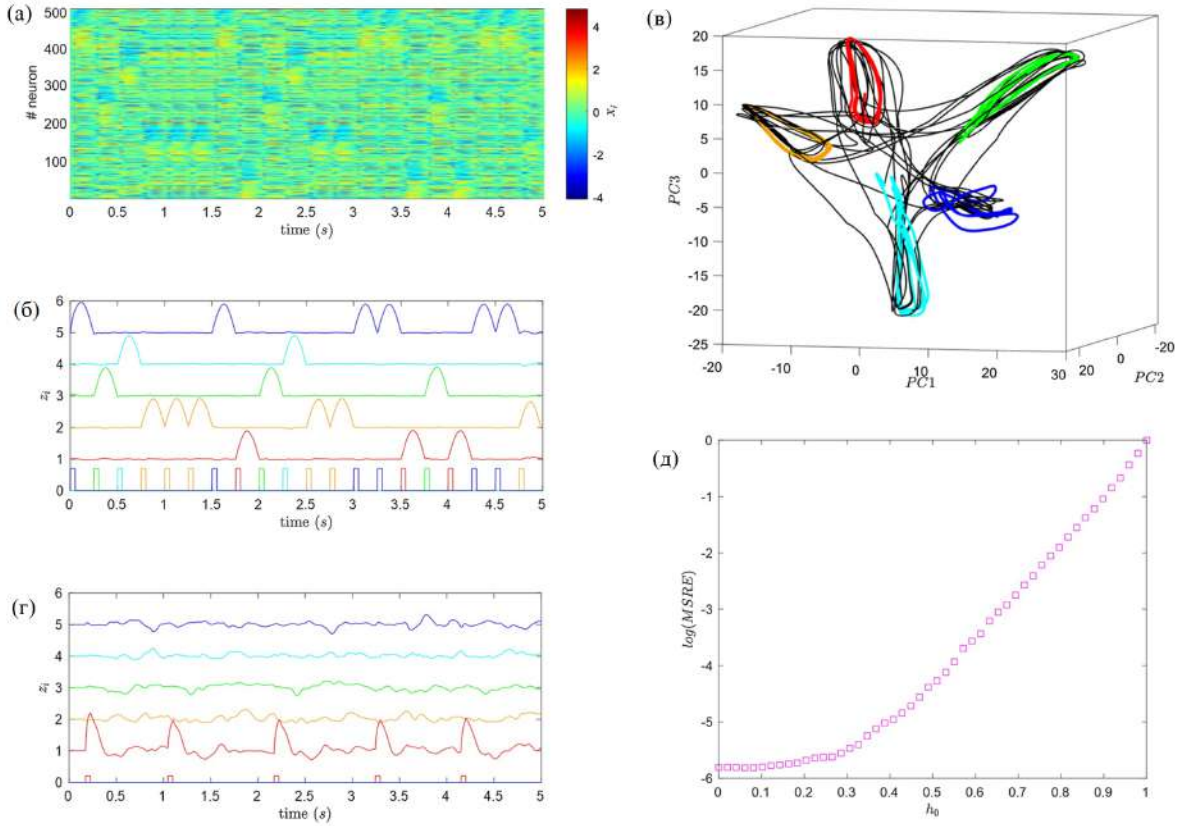

Рис. 3.20 – Дискриминация входных импульсов в сети из $N = 1000$ нейронов с $L = 5$ входами и $M = 5$ выходами. (а) Пространственно-временна́я активность $x_i(t)$ 500 нейронов, упорядоченных по весам $|w_{ik}|$ для каждого выхода k. (б) Выходная активность $z_k(t)$ в ответ на входные стимулы (показаны цветом внизу). (в) Проекция на три главные компоненты: чёрная кривая — общая траектория; цветные — при стимуляции только отдельных входов. (г) Выходная активность при стимуляции только 5% нейронов с наибольшими $|w_{ik}|$. (д) Логарифм ошибки (3.18) как функция доли h_0 удалённых весов.

3.2.5. Переключение между последовательностями: метастабильные маршруты

Наиболее сложная задача — переключение между последовательностями — требует, чтобы сеть генерировала *различные* паттерны $D = 6$ последовательных активаций $M = 3$ выходных элементов в зависимости от того, какой из $L = 3$ входных элементов подал импульс. На рис. 3.21а показано, что после обучения стимуляция конкретного входного элемента приводит к воспроизведению идентичных последовательностей, тогда как импульсы от разных входов генерируют различные паттерны.

Фазовое пространство: предельный цикл и метастабильные области. В отсутствие входных стимулов динамика сети переключается на периодический режим ($\lambda_1 = 0$), который *не совпадает* ни с одним из трёх целевых паттернов (рис. 3.21б). В N-мерном фазовом пространстве этому соответствует устойчивый предельный цикл, проекция которого на подпространство главных компонент показана чёрной кривой на рис. 3.21в. Траектории, соответствующие трём целевым паттернам (цветные кривые), на одних участках следуют вблизи этого цикла, а на других — уходят далеко от него в *метастабильные области* фазового пространства, сформированные в процессе обучения.

Таким образом, роль внешних импульсов — *выталкивание* траектории с устойчивого предельного цикла в метастабильные области, соответствующие конкретным целевым последовательностям. После прохождения метастабильной области траектория возвращается в окрестность цикла, где может быть вытолкнута следующим импульсом в ту же или иную метастабильную область. Структура фазового пространства после обучения определяется характеристиками входов, выходов и целевого отображения «вход–выход». Слабые возмуще-

ния характеристик входных импульсов приводят к траекториям, близким к целевым метастабильным маршрутам; существенные отклонения (по длительности, амплитуде или форме) могут направить траекторию в побочные притягивающие области, сформированные как побочный результат обучения.

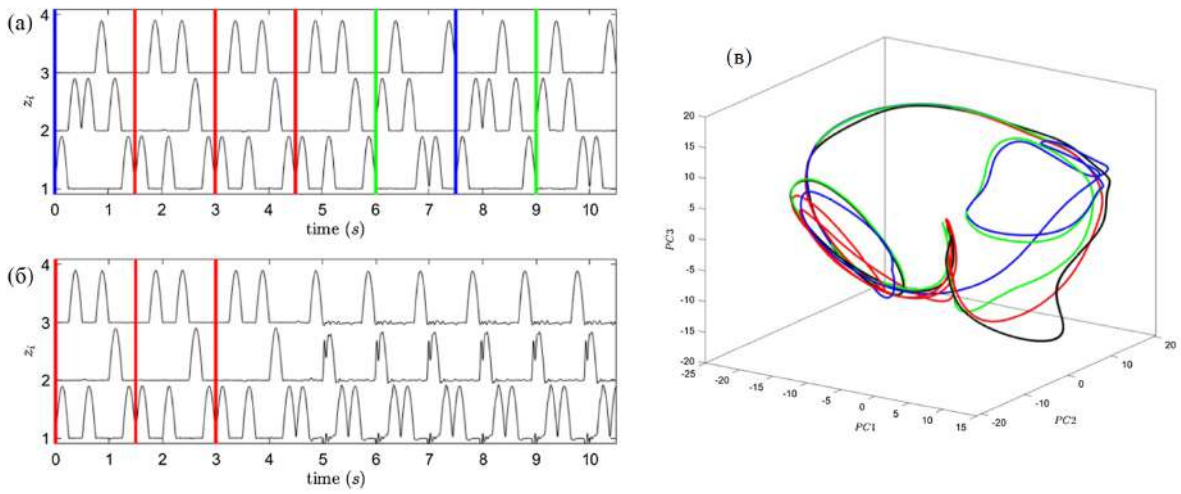

Рис. 3.21 – Переключение между последовательностями в сети из $N = 1000$ нейронов с $L = 3$ входами и $M = 3$ выходами ($D = 6$ активаций). (а) Выходная активность $z_k(t)$ в ответ на импульсы от трёх входных элементов (цвет импульса в начале каждой последовательности). (б) Выходная активность в присутствии и в отсутствие стимулов: без стимулов сеть генерирует периодический режим, не совпадающий ни с одним целевым. (в) Проекция на три главные компоненты: чёрная кривая — устойчивый предельный цикл (автономный режим); цветные — метастабильные маршруты, активируемые стимулами от различных входов. Стимулы выталкивают траекторию с цикла в метастабильные области.

3.2.6. Сопоставление аттракторного и переходного механизмов

Сопоставление трёх задач, исследованных на одной и той же архитектуре с единым алгоритмом обучения, позволяет выделить принципиальные различия между аттракторным и переходным механизмами реализации функциональности (табл. 3.1).

Носитель функции. В аттракторном механизме функция реализуется устойчивым инвариантным множеством — предельным циклом, на который траектории притягиваются из широкой области начальных условий. В переходном ме-

Таблица 3.1 – Сопоставление аттракторного и переходного механизмов реализации функциональности в обученных рекуррентных сетях.

Характеристика	**Аттракторный механизм** (задача 1)	**Переходный механизм** (задачи 2, 3)
Носитель функции	Устойчивый предельный цикл	Метастабильные переходные траектории
Старший λ_1	$\lambda_1 = 0$ (нейтральное направление вдоль цикла)	$\lambda_1 > 0$ (хаос) в отсутствие стимулов; регуляризация при стимуляции
Роль входа	Не требуется после обучения; автономная генерация	Необходим для запуска каждого акта вычисления
Фоновое состояние	Регулярная динамика на аттракторе	Хаотическое блуждание
Робастность	Высокая: широкий бассейн притяжения	Зависит от точности стимула; хаотический фон создаёт вариабельность
Гибкость	Низкая: один фиксированный паттерн	Высокая: разные стимулы — разные маршруты

ханизме носитель — непритягивающая траектория, существующая только при активации входным сигналом. В задаче 3 наблюдается промежуточная ситуация: автономный режим — предельный цикл, не совпадающий с целевыми; стимулы выталкивают траекторию в метастабильные области.

Динамический режим. Аттракторный механизм формирует регулярный режим с $\lambda_1 = 0$ и отрицательными остальными показателями. Переходный механизм сохраняет хаотический фон ($\lambda_1 > 0$) в отсутствие стимулов. С позиции радиофизики первый случай — самовозбуждённый автогенератор, второй — нелинейная система, отвечающая на импульсное воздействие сложным, но воспроизводимым откликом.

Баланс робастности и гибкости. Аттракторный механизм максимизирует устойчивость: малые возмущения не выводят систему из бассейна притяжения. Переходный механизм обеспечивает контекстную переключаемость — парадигму «вычислений по запросу»: различные стимулы мгновенно активируют различные маршруты без перенастройки сети. Однако хаотический фон создаёт вариабельность начальных условий, что может влиять на точность вос-

произведения.

Формирование функционально значимых групп. Результат о достаточности стимуляции 5% нейронов для воспроизведения целевого отклика (п. 3.2.4) свидетельствует о том, что обучение формирует не только глобальную перестройку фазового пространства, но и локальную функциональную специализацию — появление компактных групп нейронов, избирательно ответственных за конкретные выходы. Это перекликается с феноменом нейронов концепций в нейронауке — элементов, избирательно откликающихся на определённые стимулы или категории [176], хотя здесь специализация возникает не через пластичность рекуррентных связей, а через настройку считывающих весов.

3.2.7. Выводы

Таким образом, в рамках единой резервуарной архитектуры с обучением FORCE выявлены два взаимодополняющих механизма реализации функциональности: аттракторный (предельный цикл, $\lambda_1 = 0$) и переходный (метастабильные маршруты на фоне хаоса, $\lambda_1 > 0$). Подавление хаоса стимулом исследовалось в [170], устойчивая генерация паттернов в хаотических сетях — в [171], однако систематическое сопоставление обоих механизмов в одной архитектуре и анализ переключения между множественными последовательностями проведены впервые. Обнаруженная функциональная специализация компактных групп элементов (стимуляция $\sim$5 % элементов достаточна для воспроизведения целевого отклика) указывает на формирование выраженной модульной структуры в процессе обучения. Метастабильные маршруты охарактеризованы здесь проекциями на главные компоненты и показателями Ляпунова; более детальная количественная характеризация — с привлечением топологических инструментов персистентной гомологии — составляет предмет следующего разде-

ла, в котором, кроме того, исследуется вопрос о том, как эффективность обработки внешнего сигнала зависит от типа нелинейного элемента и от соответствия между внутренней динамикой резервуара и структурой решаемой задачи.

3.3. Топологический и геометрический анализ представлений в резервуарных сетях

В предыдущих разделах были установлены два качественно различных динамических механизма реализации функциональности в обучаемых рекуррентных сетях: аттракторный (формирование устойчивого предельного цикла, п. 3.2.3) и переходный (регуляризация хаоса внешним стимулом, п. 3.2.4–3.2.5). Исследование этих механизмов проводилось посредством вычисления показателей Ляпунова и визуализации проекций на главные компоненты. Однако указанные инструменты не позволяют ответить на более глубокий вопрос: *почему* данный активный элемент сети и данный тип динамики хорошо или плохо решают конкретную задачу? Зависит ли точность решения задачи от того, насколько внутренние моды резервуара согласованы со структурой обрабатываемого сигнала?

Настоящий раздел посвящён введению двух взаимодополняющих классов количественных характеристик вычислительных представлений.

Первый класс составляют *топологические характеристики*, извлекаемые методами персистентной гомологии — раздела топологического анализа данных, позволяющего отслеживать рождение и исчезновение топологических структур (связных компонент, циклов, полостей) в данных при непрерывном изменении масштаба рассмотрения [177]. Эти характеристики описывают качественную организацию множества наблюдаемых состояний: наличие циклов, полостей и иных структур, устойчивых к малым возмущениям.

Второй класс составляют *геометрические характеристики*, связывающие точность решения задачи с формой и ориентацией низкоразмерного многообразия (гладкой поверхности, на которой сосредоточены состояния сети) в пространстве активностей. Под геометрией многообразия здесь и далее понимается совокупность метрических свойств — кривизна, ориентация относительно осей пространства состояний, степень линейности координатного представления, — в отличие от топологии, описывающей лишь качественную связность (число «дырок», циклов и т. п.).

На основе этих двух классов характеристик формулируется и проверяется *принцип вычислительного соответствия*: точность решения задачи резервуарной сетью максимальна, когда геометрия и топология её внутреннего представления согласованы со скрытой (латентной, т. е. не наблюдаемой напрямую, но определяющей структуру задачи) переменной. С позиции радиофизики данный принцип представляет собой аналог принципа согласования: максимальная эффективность нелинейного преобразователя достигается при совпадении его внутренних мод со структурой входного сигнала.

3.3.1. Введение и постановка задачи

Топологический анализ данных приобрёл значительную популярность как в нейронауке, так и в машинном обучении [178, 179]. Его основной инструмент — персистентная гомология — позволяет извлекать устойчивую, инвариантную к масштабу информацию о качественной «форме» данных [177]. Применение методов алгебраической топологии к нейронным данным позволило обнаружить кольцевые структуры в активности нейронов направления головы [180] и тороидальные представления в энторинальной коре. Однако систематическое использование этих методов для *сравнительного* анализа различных типов ак-

тивных элементов в резервуарных вычислениях ранее не проводилось.

Параллельно развивается подход нейронных многообразий [24, 26], в рамках которого вычислительные свойства обученных сетей связываются с геометрией низкоразмерных многообразий в пространстве состояний. Идея о том, что точность решения задачи зависит от согласования структуры представления и структуры задачи, обсуждалась качественно [26], однако количественная формализация через топологические инварианты (числа Бетти β_k, определяемые ниже в п. 3.3.2), и геометрические метрики (ошибка линейного декодирования фазы), обсуждается здесь впервые.

Несмотря на многообразие реализаций резервуарных вычислений — от стандартных сетей эхо-состояний (ESN) [19] и машин жидких состояний (LSM) [20] до физических резервуаров [149, 181] — единый подход к сравнению вычислительных возможностей различных субстратов в большой степени отсутствует. Открытыми остаются вопросы: почему спайковые резервуары часто энергоэффективнее, но требуют больше элементов? Как вычислительная ёмкость зависит от свойств динамической памяти? Чем определяется особая эффективность осцилляторных сетей [182—184]? Гипотеза о работе «на краю хаоса» [185] не даёт полного ответа, поскольку не учитывает геометрию представления.

В данном разделе эти вопросы решаются посредством: (1) введения канонической задачи с известной скрытой топологией; (2) построения трёх типов резервуаров, согласованных по топологии связей, но различных по динамике элементов; (3) количественного сравнения точности, топологии и геометрии представлений.

3.3.2. Методы алгебраической топологии

Топологический анализ данных на основе персистентной гомологии предоставляет математический аппарат для характеризации качественной структуры множеств наблюдений [177]. В настоящем подразделе кратко изложены те элементы этого аппарата, которые используются в последующем анализе.

Матрица расстояний. Исходными данными для анализа служит множество точек (наблюдений) в некотором метрическом пространстве. На основе этого множества строится матрица попарных расстояний $[D_{ij}]$. Выбор метрики определяется природой данных: для непрерывных векторов состояний используется евклидово расстояние, для последовательностей дискретных событий (спайковых последовательностей) применяются специализированные метрики, такие как метрика Виктора–Пурпуры [186], определяющая расстояние между двумя последовательностями как минимальную стоимость преобразования одной в другую посредством элементарных операций вставки, удаления и временно́го сдвига событий. В рамках настоящего раздела для анализа непрерывных представлений резервуаров используется евклидово расстояние.

Фильтрация и персистентная гомология. Матрица $[D_{ij}]$ служит основой для построения *фильтрации Виеториса–Рипса* — вложенной последовательности симплициальных комплексов $\mathcal{R}_\epsilon$, параметризованной возрастающим порогом расстояния $\epsilon \geq 0$. При $\epsilon = 0$ каждая точка изолирована; по мере роста ϵ между достаточно близкими точками возникают рёбра, треугольники и симплексы высших порядков, формируя всё более связную структуру. Персистентная гомология отслеживает *рождение* (при пороге b) и *исчезновение* (при пороге d) топологических структур различной размерности: связных компонент (обозначаемых H_0), одномерных циклов (H_1), двумерных полостей (H_2) и т. д.

Результат представляется в форме *персистентной диаграммы* — множества точек (b_i, d_i) в плоскости «рождение–исчезновение», или, эквивалентно, в форме *баркода* — набора отрезков $[b_i, d_i)$. Длина отрезка $\text{pers}_i = d_i - b_i$ называется *персистентностью* (устойчивостью) и характеризует робастность соответствующей топологической структуры: структуры с большой персистентностью отражают существенные свойства данных, структуры с малой персистентностью — шум.

Числа Бетти. Числа Бетти $\beta_k(\epsilon)$ при заданном пороге ϵ подсчитывают количество k-мерных топологических структур, существующих при данном масштабе: β_0 — число связных компонент, β_1 — число независимых одномерных циклов (замкнутых контуров, не стягиваемых в точку), β_2 — число замкнутых двумерных полостей. В контексте настоящего раздела принципиальную роль играет число β_1: наличие устойчивого (высокоперсистентного, т. е. существующего в широком диапазоне значений порога ϵ) цикла H_1 указывает на циклическую организацию данных.

3.3.3. Каноническая задача и модели резервуаров

Для систематической проверки принципа вычислительного соответствия необходима задача, скрытая (латентная) структура которой *известна* и *нетривиальна* топологически.В данном разделе выбрана каноническая задача *детекции фазовой когерентности*, являющаяся признанным тестовым примером в физике и машинном обучении [187, 188].

Входной сигнал и задача классификации. Входной сигнал определяется на интервале $T_{\text{trial}} = 20$ с с шагом дискретизации $\Delta t = 0{,}01$ с:

$$u(t) = A_{\text{slow}} \sin(\omega_{\text{slow}}\, t) + A_{\text{fast}} \exp\left(-\frac{(t - t_b)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{3.19}$$

где $A_{\text{slow}} = 1{,}0$, $\omega_{\text{slow}} = 2\pi/5$, $A_{\text{fast}} = 4{,}0$, $\sigma = 0{,}05$ с — ширина гауссова всплеска, а t_b — момент всплеска. Задача бинарной классификации состоит в определении того, приходится ли момент всплеска на пиковую фазу медленной синусоиды ($\omega_{\text{slow}} t_b \pmod{2\pi} = \pi/2$, когерентный класс $y = 1$) или на произвольную фазу (некогерентный класс $y = 0$). Существенно, что релевантная латентная переменная — фаза $\phi \in S^1$ — принимает значения на окружности, что придаёт задаче *циклическую* топологию и делает её идеальным тестом для принципа соответствия.

Три типа резервуаров. Для сравнительного анализа построены три резервуара с сопоставимой топологией связей (разреженная случайная матрица, плотность 10%), но принципиально различной динамической природой элементов:

1. Частотный резервуар (ESN) — стандартная архитектура сетей эхосостояний [19]. Вектор состояний $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ изменяется в соответствии с дискретным уравнением

$$\mathbf{x}_{t+1} = (1 - \alpha)\,\mathbf{x}_t + \alpha\,\tanh(\mathbf{W}_{\text{res}}\,\mathbf{x}_t + \mathbf{W}_{\text{in}}\,u_t), \tag{3.20}$$

где $\alpha = 0{,}1$ — параметр утечки, $\mathbf{W}_{\text{res}}$ — матрица рекуррентных связей, масштабированная к спектральному радиусу ρ.

2. Спайковый резервуар (LSM, на LIF-нейронах) [20]. Динамика мембранного потенциала $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ и синаптического тока $\mathbf{I}_{\text{syn}} \in \mathbb{R}^N$ описывается системой

$$\begin{cases} \tau_{\text{mem}}\,\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{v} + \mathbf{I}_{\text{syn}}, \\ \tau_{\text{syn}}\,\dot{\mathbf{I}}_{\text{syn}} = -\mathbf{I}_{\text{syn}} + \mathbf{W}_{\text{res}}\,\mathbf{s}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\,u(t), \end{cases} \tag{3.21}$$

где $\tau_{\text{mem}} = 0{,}02$ с, $\tau_{\text{syn}} = 0{,}01$ с. Нейрон i генерирует спайк ($s_i = 1$) при

$v_i > V_{\text{th}} = 1{,}0$ с последующим сбросом $v_i \to V_{\text{reset}} = 0$. Используются два варианта считывающего слоя (выходного линейного сумматора). *Статический* вариант: вектором признаков служит вектор мембранных потенциалов в конечный момент времени $\mathbf{v}(T_{\text{trial}})$. *Динамический* вариант: вектор признаков формируется объединением (конкатенацией, т. е. последовательным соединением в один вектор) последних $K = 5$ векторов мембранных потенциалов, взятых с интервалом 0,1 с, и сглаженных (экспоненциально взвешенных по времени) счётчиков спайков — величин, пропорциональных числу спайков, усреднённых с экспоненциальным ядром с постоянными времени 0,02 и 0,05 с.

3. Осцилляторный резервуар (модель Курамото) — ансамбль связанных фазовых осцилляторов [43, 165]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \, \sin(\theta_j - \theta_i) + W_{\text{in},i} \, u(t), \tag{3.22}$$

где $\omega_i \sim \mathcal{N}(2\pi/5, \ 0{,}01^2)$ — собственные частоты, центрированные вокруг частоты входного воздействия, K — сила связи, $\mathbf{A}$ — бинарная матрица смежности. Вектор состояний для считывающего слоя строится как евклидово вложение фаз: $\mathbf{x}(t) = [\cos\theta(t), \ \sin\theta(t)]^\top \in \mathbb{R}^{2N}$.

Калибровка параметров. Для обеспечения корректного сравнения ключевые динамические параметры каждой модели (спектральный радиус ρ для ESN, масштаб рекуррентных весов w_{scale} для LIF, сила связи K для модели Курамото, а также входное масштабирование) оптимизировались посредством систематического перебора по сетке значений. Критерий оптимизации состоял в размещении каждого резервуара в динамическом режиме, наиболее чувствительном к входному воздействию: для частотного и спайкового типа — максимизация расходимости близких траекторий (оцениваемая по конечноразностному

приближению старшего показателя Ляпунова), для осцилляторного — максимизация спектральной мощности параметра порядка на частоте внешнего воздействия.

Считывание и классификация. На основе векторов признаков каждого резервуара производится обучение линейного классификатора методом логистической регрессии с L_2-регуляризацией. Для корректного сравнения все векторы признаков предварительно проецируются на общее пространство размерности $D = 64$ методом анализа главных компонент (PCA).

Протокол топологического и геометрического анализа. Для топологического анализа исследуются облака *конечных состояний* $\{\mathbf{x}(T_{\text{trial}}, \phi)\}$, где $\phi \in [0, 2\pi)$ — начальная фаза чистого синусоидального входа (без всплеска), что позволяет изолировать представление фазы от временно́й эволюции. Процедура включает следующие этапы: (1) проекция на подпространство размерности $D = 20$ посредством PCA; (2) совместная стандартизация компонент; (3) равномерная подвыборка одинакового числа точек из каждой модели (процедура, при которой из каждого облака отбирается одинаковое количество точек, равномерно распределённых по значениям фазы ϕ, для устранения влияния различий в плотности выборки на результаты топологического анализа); (4) построение фильтрации Виеториса–Рипса с адаптивным выбором общего порога (доля структур H_1 с бесконечным значением порога исчезновения не более 5%).

Основная топологическая метрика — персистентность наиболее выраженного цикла H_1, оцениваемая с помощью бутстрапирования (метода повторной выборки с возвращением, $n = 30$ повторений, позволяющего оценить статистическую устойчивость результата). Для геометрического анализа используется линейная модель, восстанавливающая фазу $[\cos\phi, \sin\phi]$ по конечному состоянию, с оценкой средней абсолютной угловой ошибки (MAE).

3.3.4. Точность решения задачи: сравнение трёх типов активных элементов

Ключевой количественной метрикой служит *минимальный размер резервуара* N^*, необходимый для достижения 95% точности классификации. Результаты систематического численного исследования (рис. 3.22) обнаруживают существенные различия между различными типами активных элементов.

- *Осцилляторный резервуар*: $N^* \approx 20$ — наиболее экономичный по числу элементов.
- *Частотный резервуар*: $N^* \approx 80$ — вчетверо больше.
- *Спайковый резервуар* со *статическим* считывающим слоем (только конечное состояние): $N^* \approx 150$ — наименее экономичный.
- *Спайковый резервуар* с *динамическим* считывающим слоем (объединение состояний за несколько последних моментов времени, см. п. 3.3.3): $N^* \approx 80$ по точности и $N^* \approx 40$ по критерию AUC — площади под ROC-кривой (кривой зависимости доли верно классифицированных положительных примеров от доли ложных срабатываний; AUC представляет собой интегральную метрику качества классификации, не зависящую от выбора порога бинаризации [189]).

Осцилляторный петивный элемент, таким образом, демонстрирует четырёхкратное преимущество перед частотным и 7,5-кратное — перед спайковым со статическим считыванием. Превосходство спайкового резервуара с динамическим считыванием над частотным по критерию AUC указывает на существенную роль динамических признаков для спайковых систем — наблюдение, значимое для проектирования нейроморфных устройств.

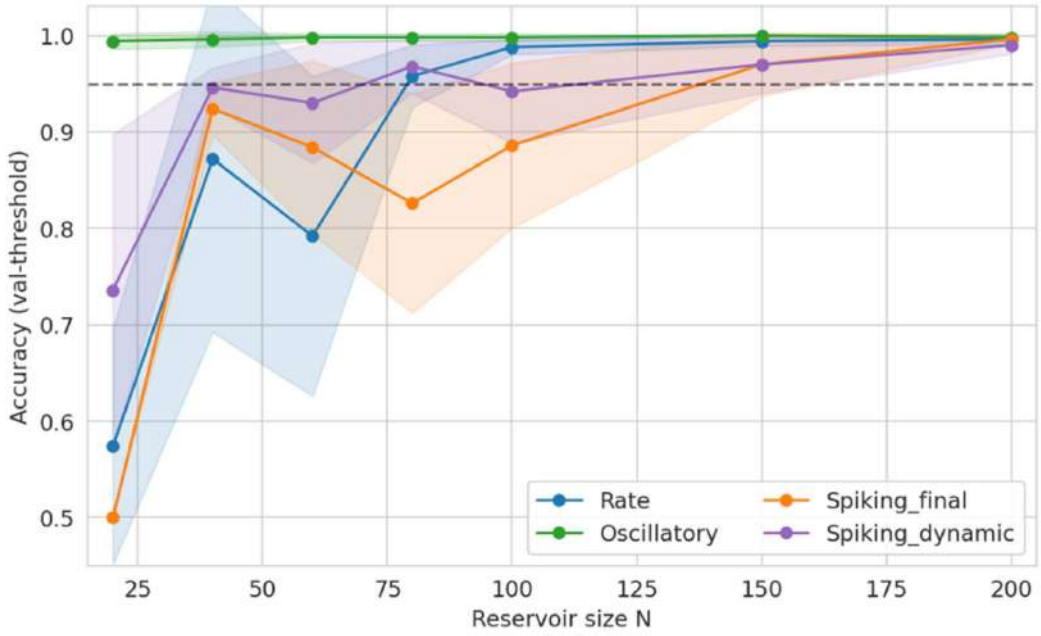

Рис. 3.22 – Зависимость точности классификации от размера резервуара N для четырёх моделей в задаче детекции фазовой когерентности. Горизонтальная штриховая линия — порог 95%. Осцилляторный резервуар (зелёный): $N^* \approx 20$. Частотный (синий): $N^* \approx 80$. Спайковый со статическим считыванием (оранжевый): $N^* \approx 150$. Спайковый с динамическим считыванием (пурпурный): $N^* \approx 80$ по точности, ≈ 40 по AUC.

3.3.5. Топология и геометрия представлений

Для выяснения причин обнаруженных различий в точности проведён анализ представлений конечных состояний $\{\mathbf{x}(T, \phi)\}$ для резервуаров размера $N = 200$ (рис. 3.23). Анализ проведён в двух дополняющих направлениях: топологическом и геометрическом.

Топологический анализ. На основе персистентной гомологии облаков конечных состояний получены следующие результаты.

- Осцилляторный и частотный резервуары формируют многообразия, обладающие статистически значимым одномерным циклом ($\beta_1 > 0$): на персистентных диаграммах обнаруживаются признаки H_1 с большой персистентностью, т. е. существующие в широком диапазоне масштабов фильтрации (рис. 3.23г,е).

- Статическое представление спайкового резервуара не содержит устойчивых циклических структур: $\beta_1 \approx 0$ (рис. 3.23д). Иными словами, множество конечных состояний спайкового резервуара при статическом считывании не обладает циклической организацией — все обнаруживаемые циклы имеют малую персистентность и объясняются шумом.

Таким образом, наличие циклической топологии ($\beta_1 > 0$) оказывается *необходимым*, но *не достаточным* условием высокой точности: оба резервуара с выраженным циклом (осцилляторный и частотный) обладают $\beta_1 > 0$, однако различаются по N^* вчетверо.

Геометрический анализ: линейное декодирование фазы. Ключевое различие обнаруживается при исследовании геометрии циклических многообразий. Для количественной оценки геометрических свойств была обучена линейная модель (линейная регрессия), восстанавливающая входную фазу ϕ из конечного состояния $\mathbf{x}(T, \phi)$ путём аппроксимации пары $[\cos\phi, \sin\phi]$ линейной комбинацией компонент вектора состояний. Качество восстановления оценивалось по средней абсолютной угловой ошибке (MAE). Полученные результаты принципиально различны для трёх субстратов.

- Осцилляторный резервуар: MAE $\approx 0{,}02°$ — практически идеальное восстановление фазы линейной моделью. Это означает, что циклическое многообразие ориентировано в пространстве состояний таким образом, что фаза линейно выражается через координаты состояния (далее для краткости: многообразие обладает линейной координатной структурой).

- Частотный резервуар: MAE $\approx 8°$ — существенная ошибка восстановления, несмотря на выраженный H_1-цикл. Циклическое многообразие присутствует, но его форма искажена: зависимость фазы от координат состо-

яния существенно нелинейна.

- Спайковый резервуар (статическое считывание): MAE $\approx 45°$ — фаза не восстанавливается.

Физическая интерпретация этих различий состоит в следующем. Для слабо возбуждаемого, слабо связанного осцилляторного резервуара коллективная фазовая динамика сводится к синхронизованному состоянию, глобальная фаза которого следует за фазой входного воздействия. Вследствие этого фаза естественным образом становится линейной координатой в пространстве состояний — подобно тому, как в радиофизике линейный фазовращатель (элемент, вносящий сдвиг фазы, пропорциональный управляющему воздействию) обеспечивает прямую связь между входом и выходом. Частотный резервуар также формирует циклическое многообразие, однако нелинейность активационной функции tanh искажает его форму — по аналогии, это фазовращатель с нелинейной передаточной характеристикой.

3.3.6. Парадокс спайкового резервуара и его разрешение

Результаты предыдущих подразделов обнаруживают следующее несоответствие: спайковый резервуар при статическом считывании не обладает циклической топологией и не позволяет восстановить фазу, однако при использовании динамического считывающего слоя демонстрирует высокое качество классификации ($N^* \approx 80$ по точности, ≈ 40 по AUC). Выяснение природы этого несоответствия составляет один из основных результатов данного раздела.

При использовании динамического вектора признаков (объединение $K = 5$ последних векторов мембранных потенциалов, взятых с интервалом 0,1 с, и сглаженных счётчиков спайков, см. описание в п. 3.3.3) обнаруживается следу-

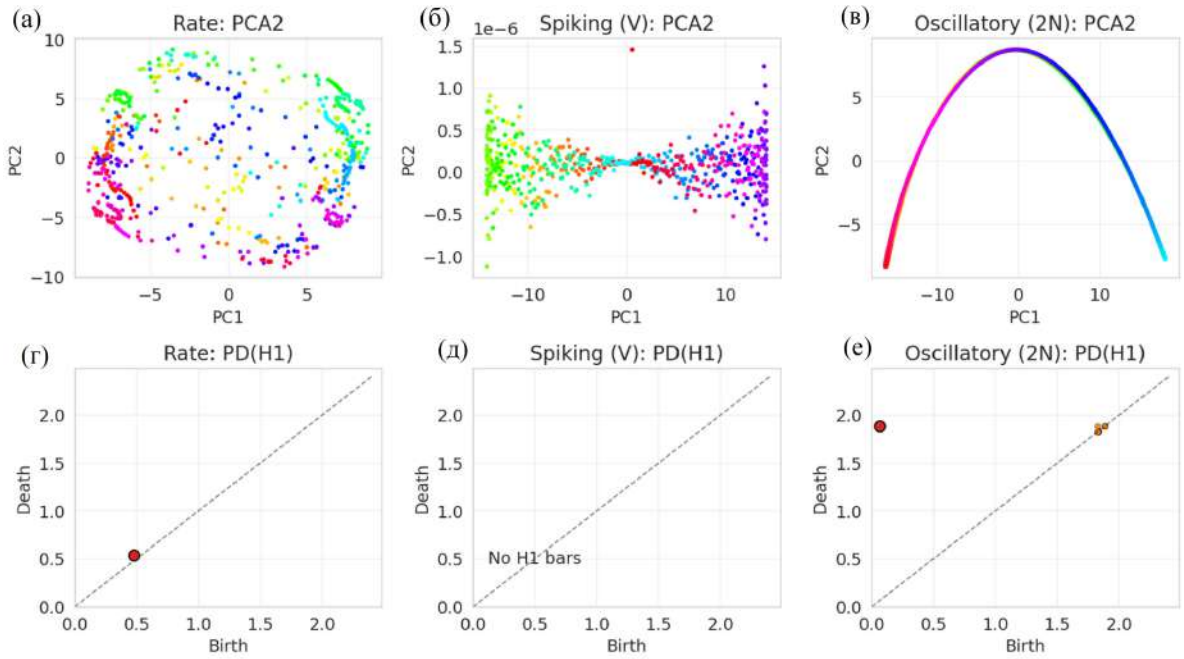

Рис. 3.23 – Геометрия и топология конечных состояний $\{\mathbf{x}(T, \phi)\}$ для резервуаров размера $N = 200$. (а–в) Двумерные проекции методом главных компонент (PCA), окрашенные по фазе $\phi \in [0, 2\pi)$. (г–е) Персистентные диаграммы для одномерных циклов (H_1). Осцилляторный (а, г) и частотный (в, е) резервуары формируют многообразия с выраженными циклами H_1 (отмечены красными кружками). Спайковый резервуар со статическим считыванием (б, д) не обнаруживает устойчивой циклической структуры. Ключевое различие — в геометрии: осцилляторный цикл обладает линейной координатной структурой (MAE $\approx 0{,}02°$), частотный — существенно нелинейной (MAE $\approx 8°$).

ющее:

- Линейная модель достигает практически идеального восстановления фазы: MAE $\approx 0{,}00°$.

- На основе топологического анализа динамического представления установлено, что оно обладает *наиболее выраженным* (наиболее персистентным) циклом H_1 среди всех четырёх вариантов (рис. 3.24).

Таким образом, спайковая сеть кодирует фазовую информацию не в конечном мгновенном состоянии, а в пространственно-временно́й динамике. Динамический считывающий слой, объединяя состояния за несколько последовательных моментов времени (временно́е окно — интервал времени, в пределах которого агрегируются состояния; в данном случае это K отсчётов с заданным шагом, что соответствует интервалу $(K-1)\times 0{,}1 = 0{,}4$ с), реконструирует многомерное представление, в котором скрытый циклический аттрактор становится линейно разделимым. Данная интерпретация согласуется с теоремой Такенса о вложении с задержкой [190]: объединение координат, сдвинутых во времени, позволяет восстановить структуру аттрактора из одномерной проекции.

Обнаруженное различие выявляет фундаментально разные вычислительные стратегии:

- Осцилляторные сети реализуют *прямое статическое отображение*: фаза входного воздействия непосредственно отображается в фазу коллективного состояния, и для её извлечения достаточно мгновенного снимка.

- Спайковые сети реализуют *динамическое кодирование*: информация о фазе распределена во временно́й последовательности состояний и доступна лишь при интегрировании по временно́му окну.

Это наблюдение объясняет, почему статические считывающие слои недостаточны для спайковых систем в задачах с циклической структурой, и указывает на критическую роль выбора архитектуры считывающего слоя при проектировании резервуарных систем.

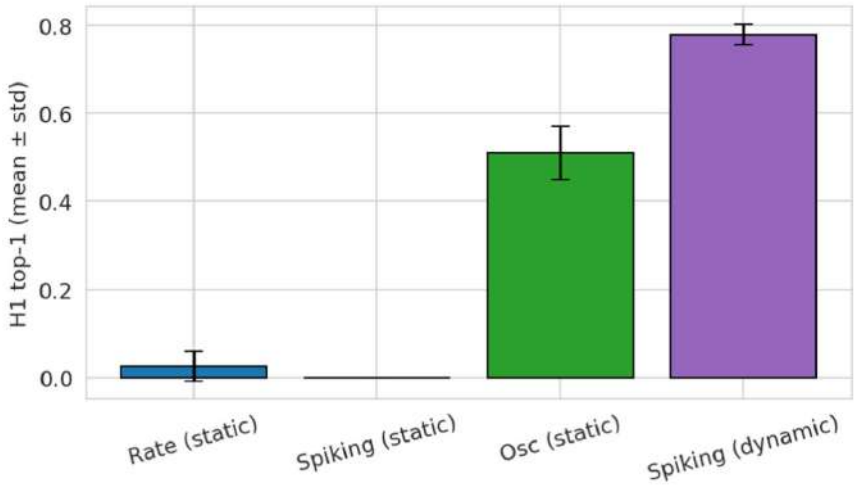

Рис. 3.24 – Персистентность наиболее выраженного цикла H_1 для четырёх типов представлений. Динамический считывающий слой преобразует спайковый резервуар из представления без устойчивой циклической структуры («spiking static») в представление с наиболее выраженным циклом («spiking dynamic»).

3.3.7. Анализ робастности результатов

Для проверки устойчивости полученных результатов проведён анализ чувствительности к параметрам процедуры топологического анализа: размерности PCA-проекции $D \in \{15, 20, 30\}$ и числу точек в равномерной подвыборке $N_{\text{cap}} \in \{400, 600, 800\}$. Каждая комбинация параметров оценивалась при $n = 30$ повторных случайных выборках (бутстрапирование — метод статистической оценки, при котором из исходных данных многократно формируются подвыборки с возвращением, что позволяет оценить разброс характеристик без необходимости аналитического вычисления доверительных интервалов).

Чувствительность персистентности к параметрам анализа. Разность персистентности наиболее выраженного цикла H_1 между осцилляторным и ча-

стотным резервуарами (вычисленная как значение для осцилляторного минус значение для частотного, усреднённое по всем повторным выборкам) оказалась преимущественно отрицательной (медиана $\approx -0{,}50$, 95% доверительный интервал $[-0{,}52;\ -0{,}40]$). Это означает, что при данном протоколе анализа персистентность цикла H_1 может быть выше у частотной модели, несмотря на её меньшую точность (рис. 3.25а). Данный результат имеет важное методологическое значение: *персистентность H_1 сама по себе не является достаточным условием высокой точности решения задачи*. Геометрическая характеристика (MAE линейного декодирования) и непосредственно точность классификации (N^*) остаются первичными показателями — топологическое соответствие необходимо, но геометрическое определяет итоговую точность.

Зависимость динамического представления от временны́х параметров. Персистентность цикла H_1 в динамическом спайковом представлении систематически возрастает при увеличении числа объединяемых временны́х отсчётов (K) и интервала между ними (рис. 3.25б). Это указывает на то, что расширение временно́го окна, в пределах которого агрегируются состояния, способствует более полному выявлению скрытой циклической структуры.

3.3.8. Выводы

Совокупность результатов раздела позволяет сформулировать уточнённый принцип вычислительного соответствия: высокая точность достигается тогда, когда многообразие пространства состояний резервуара не только *топологически эквивалентно* структуре задачи (наличие цикла $\beta_1 > 0$ для задачи с циклической скрытой переменной), но и *геометрически согласовано* с ней (малое MAE линейного декодирования фазы). Идея о согласованности представления и задачи обсуждалась качественно в [24, 26]; количественная формализация через

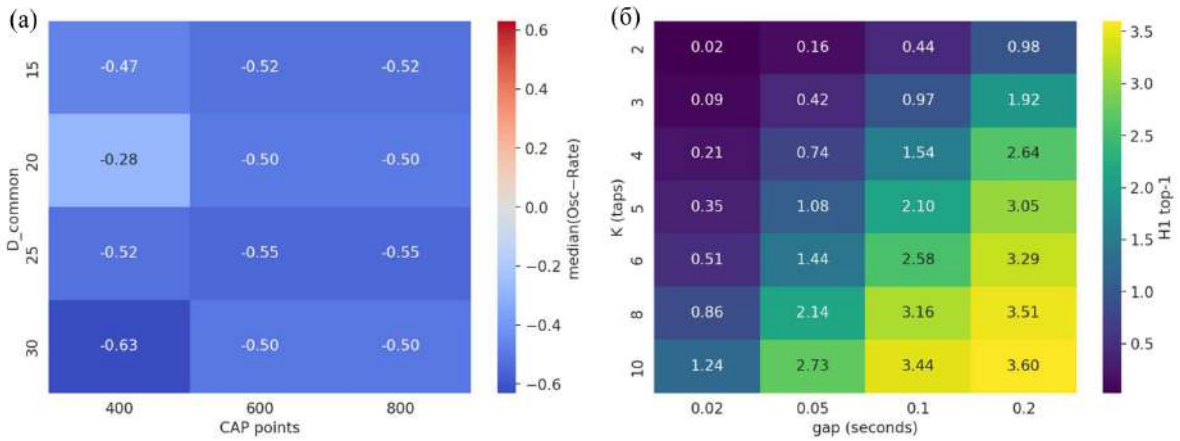

Рис. 3.25 – Анализ робастности. (а) Тепловая карта разности персистентности наиболее выраженного цикла H_1 (осцилляторный минус частотный резервуар) в зависимости от параметров анализа (D — размерность PCA-проекции, N_{cap} — число точек подвыборки). Преимущественно отрицательные (синие) значения означают, что по данной метрике частотная модель может превосходить осцилляторную, что подчёркивает недостаточность одной лишь персистентности для оценки вычислительных возможностей. (б) Персистентность H_1 для динамического спайкового представления в зависимости от числа объединяемых отсчётов K и интервала между ними: увеличение временно́го окна усиливает выраженность циклической структуры.

персистентную гомологию в контексте резервуарных вычислений, сравнительный анализ трёх различных типов активных элементов (частотного, спайкового, осцилляторного) на одной канонической задаче, а также разрешение парадокса спайкового резервуара через динамическое считывание с интерпретацией через вложение с задержкой составляют новые результаты. Принцип соответствия установлен в численном моделировании; естественно возникает вопрос, сохраняется ли он в реальном физическом устройстве. В следующем разделе представлена экспериментальная реализация физического вычислительного ядра — электронного резервуара на цепочке генераторов ФитцХью–Нагумо — с разработанной методологией томографии ядра для диагностики вычислительной ёмкости.

3.4. Физический резервуар на основе электронной цепочки связанных возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо

Результаты предыдущих разделов данной главы получены преимущественно в программных реализациях, где динамика резервуара (нелинейной рекуррентной сети с фиксированными внутренними связями) моделируется численно. Однако парадигма резервуарных вычислений изначально мотивирована идеей делегирования сложных нелинейных преобразований *самому физическому устройству*: для цифровой настройки остаётся лишь линейный выходной сумматор (считывающий слой). Пространственно-временна́я динамика связанных нелинейных элементов играет роль естественного субстрата высокоразмерных преобразований, необходимых для решения задач классификации.

С точки зрения радиофизики, под *вычислением* здесь понимается нелинейное преобразование входного сигнала в многомерный отклик, структура которого зависит от входа и может быть использована для решения задачи распознавания. Цепочка возбудимых генераторов, на граничные элементы которой подаётся периодическое воздействие, функционирует как *нелинейный пространственный фильтр с фиксированной структурой*: входной сигнал претерпевает нелинейное смешивание при распространении волн возбуждения, а выходной отклик снимается со всех узлов. Обучение сводится к настройке весов линейного сумматора на выходе — задача, решаемая стандартными методами регрессии с регуляризацией.

3.4.1. Введение и постановка задачи

Физические резервуары. Идея использования динамики физического устройства в качестве вычислительного субстрата активно развивается с начала 2010-х

годов. Продемонстрированы резервуары на основе фотонных систем с задержкой [191, 192], мемристивных схем [193], оптоэлектронных устройств и аналоговых электронных нейронов [194]. Обзор физических резервуарных вычислений дан в [149]. Вместе с тем систематическое исследование геометрии пространства откликов пространственно-протяжённой возбудимой цепочки — с количественным анализом структуры пространства признаков и демонстрацией возможности повторного использования однократно измеренной карты откликов для различных задач — до настоящей работы не проводилось.

Методы ядра и физические отображения признаков. Методы ядра в статистическом обучении (метод опорных векторов [195], методы на основе ядерных функций [196]) основаны на отображении данных в высокоразмерное пространство признаков, в котором задача классификации становится линейно разделимой. Ядерная функция $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \langle \phi(\mathbf{x}_i), \phi(\mathbf{x}_j) \rangle$ вычисляет скалярное произведение образов в этом пространстве, не требуя явного построения вектора признаков $\phi(\mathbf{x})$. Когда такое отображение реализуется динамикой физического устройства, говорят о *физическом отображении признаков*: устройство порождает явный вектор $\phi(\mathbf{x})$, а соответствующая ядерная функция вычисляется как скалярное произведение этих векторов.

Постановка задачи. Цель настоящего раздела — экспериментально продемонстрировать, что аналоговая электронная цепочка из 16 связанных возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо может функционировать как физический резервуар для задач классификации, и разработать количественную методологию анализа (*томографии*) пространства признаков, порождаемого таким устройством. Под *вычислительной ёмкостью* здесь понимается число эффективных независимых степеней свободы в пространстве признаков, доступных для разделения классов. Конкретно ставятся следующие вопросы:

1. Какова роль нелинейного спектрального смешивания и коллективной синхронизации генераторов в формировании пространства признаков, пригодного для линейного разделения классов?

2. Как количественно оценить вычислительную ёмкость физического резервуара и её зависимость от числа считывающих узлов?

3. Возможно ли повторное использование однократно измеренной карты откликов для различных задач классификации?

3.4.2. Экспериментальная установка: электронная цепочка ФитцХью–Нагумо

Экспериментальной установкой служит аналоговая электронная реализация одномерной цепочки из $N_n = 16$ связанных генераторов ФитцХью–Нагумо, работающих в возбудимом режиме (рис. 3.26). Динамика каждого узла j описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} C\frac{dU_j}{dt} &= F(U_j) - i_j + \frac{1}{R_c}\sum_{|j-k|=1}(U_k - U_j), \\ L\frac{di_j}{dt} &= U_j - R\,i_j - E_0 - E_{\text{in}}^{j}(t), \end{aligned} \tag{3.23}$$

где U_j — быстрая переменная напряжения (аналог мембранного потенциала в нейрофизиологической терминологии), i_j — медленный восстановительный ток. Кубическая нелинейность

$$F(U) = -\alpha\,U\,(U + U_0)(U - U_0) \tag{3.24}$$

в сочетании с напряжением смещения E_0 и диффузионной связью между соседними узлами определяет характерную возбудимую динамику системы.

Номинальные значения параметров: $C = 1$ мкФ, $L = 510$ Гн, $R = 1$ кОм, $\alpha = 1{,}62833 \times 10^{-4}$ В$^{-2}$Ом$^{-1}$, $U_0 = 0{,}85$ В. Большое значение индуктивности $L = 510$ Гн реализовано на печатной плате с помощью эквивалентной схемы заземлённого индуктора на основе операционного усилителя, где эффективная индуктивность определяется как $L = R_1 R_2 C$ [197].

При установке напряжения смещения $E_0 = -0{,}45$ В каждый генератор находится в *возбудимом режиме*: он имеет единственную устойчивую неподвижную точку и остаётся в состоянии покоя до тех пор, пока внешнее возмущение не превысит порога возбуждения, после чего генерируется импульс большой амплитуды с последующим возвратом в состояние покоя. Связь между соседними узлами — резистивная (диффузионная), её сила контролируется сопротивлением $R_c = 120$ кОм. Это значение обеспечивает устойчивое распространение волн возбуждения вдоль цепочки, позволяя дискретному массиву генераторов функционировать как одномерная *активная среда* — физический субстрат, способный поддерживать разнообразные пространственно-временны́е взаимодействия волновых фронтов.

3.4.3. Протокол воздействия на граничные элементы цепочки и пространственно-временной отклик

Входной сигнал подаётся на граничные элементы цепочки — первый и последний узлы. Статический входной вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ кодируется парой периодических последовательностей прямоугольных импульсов. Частоты этих последовательностей определяются линейным отображением из входных координат:

$$f_k = f_{\min} + x_k \, (f_{\max} - f_{\min}), \quad k \in \{1, 2\}, \tag{3.25}$$

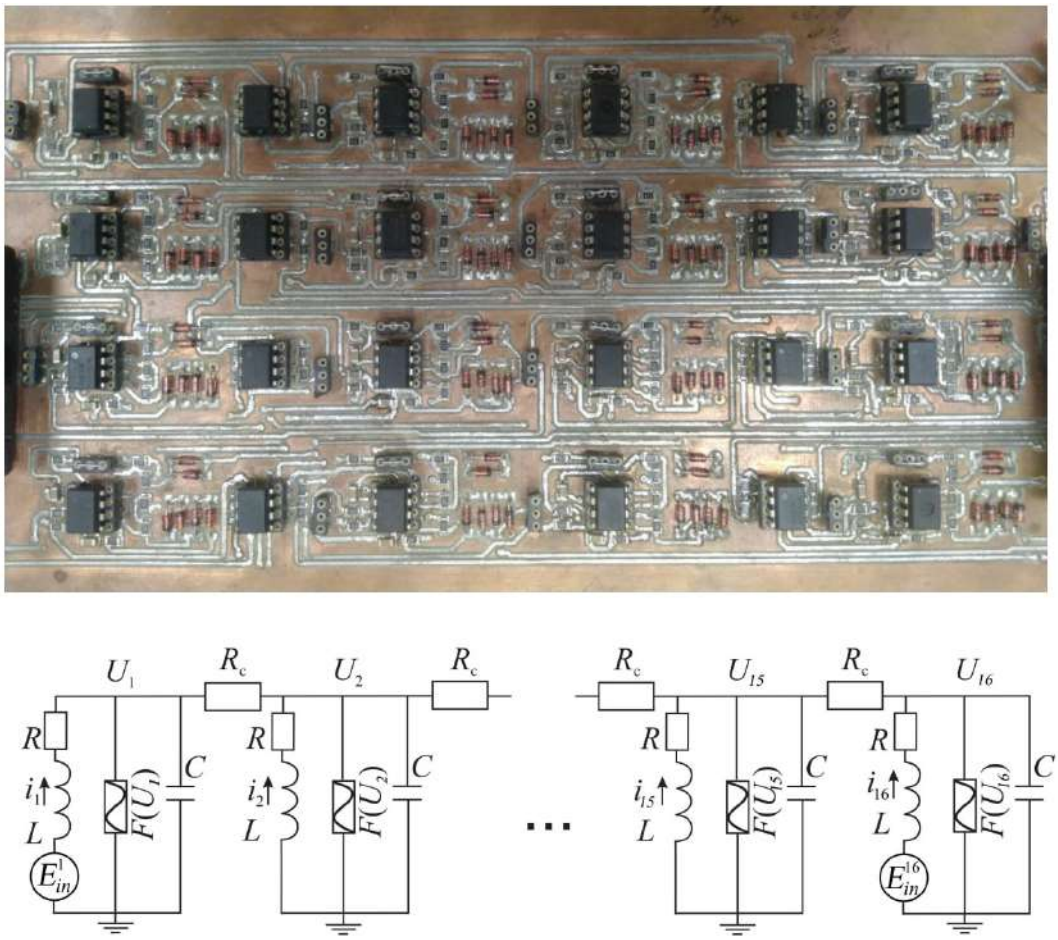

Рис. 3.26 – Электронная реализация 16-узловой цепочки возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо. (а) Фотография аппаратной платы. (б) Принципиальная схема, соответствующая математической модели (3.23): каждый генератор содержит индуктивный элемент (реализованный на операционном усилителе) и соединён с соседними узлами через резистивную сеть с сопротивлением R_c.

где $f_{\text{min}} = 0{,}5$ Гц и $f_{\text{max}} = 3$ Гц. Для удобства обозначим частоты воздействия на левой и правой границах как $f_x \equiv f_1$ и $f_y \equiv f_{16}$. Таким образом, каждая пара координат (x_1, x_2) определяет пару частот (f_x, f_y), задающих периодическое воздействие $E^1_{\text{in}}(t)$ и $E^{16}_{\text{in}}(t)$ в (3.23).

Такое воздействие на граничные элементы приводит цепочку в сложное динамическое состояние, зависящее от входа. Два волновых фронта, инициированные на противоположных концах, распространяются навстречу друг другу и взаимодействуют внутри активной среды: сталкиваются, интерферируют и аннигилируют. Результирующее поле напряжений $U_j(t)$ по всей цепочке представляет собой высокоструктурированную, воспроизводимую функцию входа $\mathbf{x}$, что обеспечивает высокоразмерное физическое отображение исходного двумерного вектора.

Напряжения $U_j(t)$ записываются со всех 16 узлов с частотой дискретизации $F_s = 200$ Гц в течение $T_{\text{trl}} = 3{,}5$ с, что даёт $T = 699$ отсчётов на узел. Все представленные ниже результаты получены на экспериментальных данных. На рис. 3.27 показано, как одна точка на входной сетке порождает уникальную матрицу пространственно-временного отклика $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{16\times T}$.

Помимо сложных волновых паттернов, наблюдаемых во временно́й области, в динамике вынужденной цепочки наблюдается выраженная зависимость спектрального состава от входа. Спектральная плотность мощности (power spectral density, PSD) отклика во внутреннем узле (рис. 3.27в,г) далека от простой суперпозиции двух частот воздействия: в ней наблюдается широкополосная структура со значительной мощностью вблизи низкочастотных *комбинационных частот* вида $|kf_x \pm lf_y|$, $k + l \leq 3$. Это является характерным признаком нелинейного смешивания внутри возбудимой среды. Появление комбинационных частот — прямое следствие кубической нелинейности (3.24): при воздействии двух тонов

на нелинейный элемент в его отклике неизбежно возникают гармоники и комбинационные составляющие. В пространственно-протяжённой цепочке этот эффект усиливается волновыми взаимодействиями, что приводит к существенно более разнообразному спектру, чем у одиночного элемента.

Данное наблюдение даёт основание для использования спектральных признаков и характеристик синхронизации при построении пространства признаков, описываемого ниже.

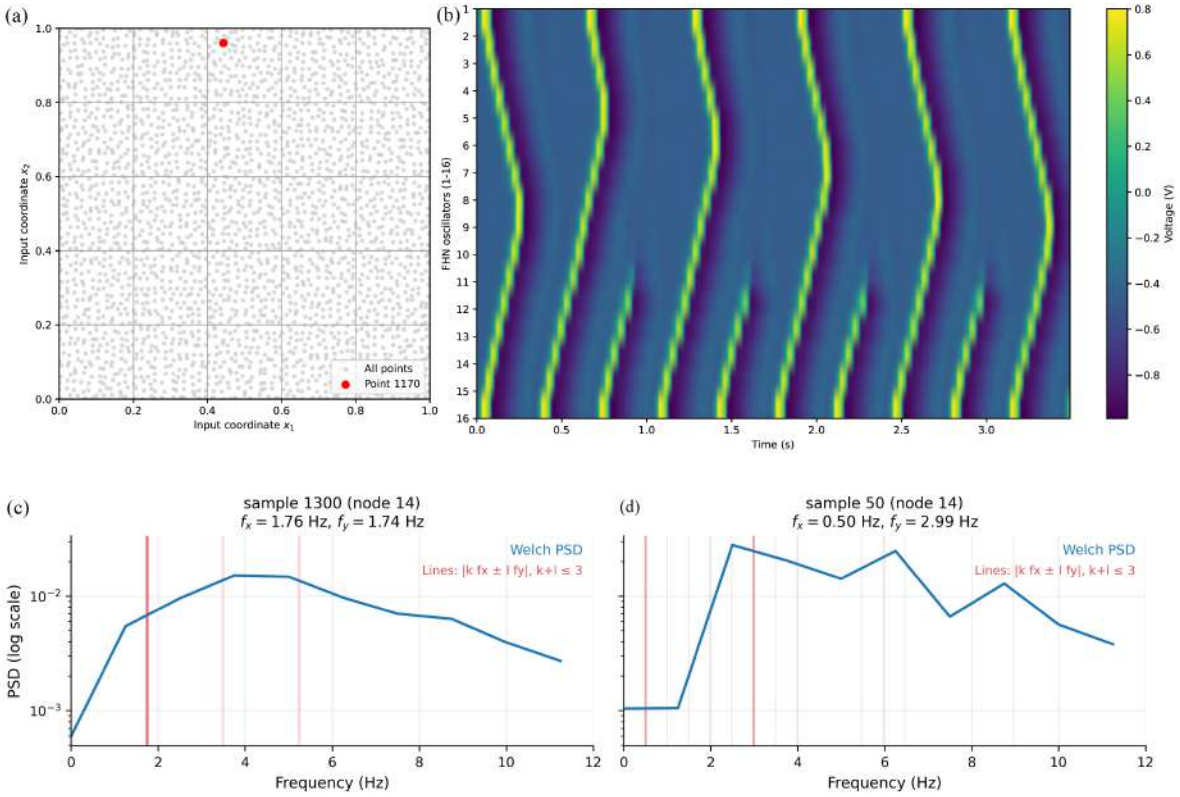

Рис. 3.27 – Отображение входа в пространственно-временную динамику и нелинейное спектральное смешивание. (а) Сетка воздействия 51×51 на входной плоскости (x_1, x_2); выделена репрезентативная точка. (б) Пространственно-временной отклик $U_j(t)$ 16-узловой цепочки для выделенной точки; частота дискретизации $F_s = 200$ Гц, длительность записи $T_{\text{trl}} = 3{,}5$ с, $T = 699$ отсчётов на узел. (в, г) Спектральная плотность мощности [198] узла 14 для двух репрезентативных входов: близкодиагональное воздействие ($f_x \approx f_y$, панель в) и сильно асимметричное ($f_x \ll f_y$, панель г). Вертикальными линиями отмечены комбинационные частоты $|kf_x \pm lf_y|$ при $k + l \leq 3$, рассчитанные по известным частотам воздействия.

3.4.4. Построение пространства признаков

Цепочка ФитцХью–Нагумо под внешним воздействием преобразует двумерный вход в высокоразмерный нелинейный воспроизводимый переходный отклик. Для систематического использования этого преобразования принимается подход *физического отображения признаков* — концепция, связывающая динамику устройства с геометрическими принципами методов ядра в статистическом обучении [196].

Физическое отображение признаков — это детерминированное преобразование входного пространства в пространство признаков, реализуемое динамикой устройства. Каждый вход подвергается преобразованию через динамику цепочки, после чего из отклика вычисляется набор характеристик, образующих явный вектор признаков:

$$\underbrace{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2}_{\text{Вход}} \xrightarrow{\text{Динамика цепочки}} \underbrace{\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{N_n \times T}}_{\text{Отклик}} \xrightarrow{\text{Характеристики}} \underbrace{\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^D}_{\text{Признаки}}. \tag{3.26}$$

Поскольку динамика устройства фиксирована (как в парадигме резервуарных вычислений), отображение $\mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$ определено однозначно, и задача классификации сводится к обучению линейного выходного сумматора в пространстве признаков — по существу, к задаче регрессии с регуляризацией.

Подход использует *иерархическое* построение признаков, где каждый уровень иерархии предназначен для описания всё более структурированных аспектов динамики системы.

Уровень 1. Локальные спектральные признаки (ϕ_{DCT}). В качестве компактного представления временно́го ряда каждого узла вычисляется дискретное косинусное преобразование (discrete cosine transform, DCT) *временно́й произ-*

водной $\dot{U}_j(t)$. Применение DCT к производной, а не к самому сигналу, усиливает высокочастотные компоненты и позволяет лучше выделить резкие переходные процессы — фронты волн возбуждения. Для учёта нестационарности динамики временно́й ряд разбивается на S сегментов, и коэффициенты DCT из всех сегментов объединяются в один вектор (конкатенируются, то есть записываются последовательно):

$$\phi_{\text{DCT}}(\mathbf{x}) = \left\{ c_j^{(s)}[k] \right\}_{j=1,\ldots,N_n;\ s=1,\ldots,S;\ k=1,\ldots,K}. \tag{3.27}$$

Полная размерность составляет $D_{\text{DCT}} = N_n \cdot S \cdot K$; при $N_n = 16$ узлах, $S = 2$ сегментах и $K = 32$ коэффициентах это даёт 1024-мерный вектор. Эти признаки описывают временну́ю и спектральную структуру отклика каждого узла в отдельности, включая широкополосные составляющие, обусловленные нелинейным частотным смешиванием (ср. рис. 3.27в,г).

Уровень 2. Характеристики синхронизации между узлами (ϕ_{coh}). Для описания коллективных эффектов, обусловленных резистивной связью между генераторами, предложен следующий подход: вектор признаков дополняется мерами *синхронизации между узлами* (coherence, coh), которые являются стандартной характеристикой коллективной динамики в радиофизике. Вычисляется квадрат модуля функции когерентности между парами узлов, разделённых пространственным смещением r:

$$C_{j,j+r}(f) = \frac{|P_{j,j+r}(f)|^2}{P_{jj}(f)\, P_{j+r,j+r}(f)}, \tag{3.28}$$

где $P_{j,j+r}(f)$ — взаимная спектральная плотность мощности, $P_{jj}(f)$ — автоспектральная плотность мощности, оцениваемые методом Уэлча [198]. Функция когерентности усредняется по набору заранее определённых частотных по-

лос, что даёт компактный набор признаков синхронизации для каждой пары узлов. В использованной конфигурации ($N_n = 16$, $r = 1$, три частотные полосы) это добавляет 45 признаков синхронизации к основному блоку DCT.

Итоговый вектор признаков формируется объединением двух уровней:

$$\phi_{\text{comp}}(\mathbf{x}) = [\phi_{\text{DCT}}(\mathbf{x});\ \phi_{\text{coh}}(\mathbf{x})], \tag{3.29}$$

давая в совокупности $D = 1069$-мерный вектор признаков.

Для набора данных из M входов соответствующие векторы признаков собираются в строки матрицы признаков $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times D}$. Каждый столбец матрицы предварительно центрируется (вычитается среднее) и нормируется (делится на стандартное отклонение), что приводит к нулевому среднему и единичной дисперсии по каждому признаку. Эмпирическая ядерная матрица — *матрица Грама*:

$$\mathbf{K} = \Phi\, \Phi^{\top}. \tag{3.30}$$

Её элементы $K_{mn} = \langle \phi(\mathbf{x}_m), \phi(\mathbf{x}_n) \rangle$ образуют таблицу попарных сходств между входами, полученных на основе динамики устройства и выбранного набора характеристик.

Считывающие слои. Для классификации используются два типа выходных сумматоров, оба допускающие выпуклую оптимизацию (то есть задача минимизации имеет единственный глобальный минимум):

(i) *Линейный сумматор* — логистическая регрессия с ℓ_2-регуляризацией. В ходе обучения формируется разделяющая гиперплоскость в пространстве признаков. Производительность оценивается по площади под ROC-кривой — AUC (Area Under the Receiver Operating Characteristic Curve), характеризующей способность классификатора различать положительные и отрицательные примеры

при всех возможных порогах принятия решения. $\mathrm{AUC} = 1{,}0$ соответствует идеальному разделению, $\mathrm{AUC} = 0{,}5$ — случайному угадыванию.

(ii) *Иерархический квадратичный сумматор (Poly2)* — метод, построенный для явного учёта взаимодействий второго порядка между доминирующими динамическими модами. Его шаги: (a) вычисление вектора ϕ_{comp}; (b) проецирование методом главных компонент (PCA) в подпространство размерности $D_{\text{keep}} = 256$, дающее вектор $\mathbf{z}$; (c) квадратичное расширение — построение всех попарных произведений $\phi_{\text{Poly2}} = \{z_p z_q\}_{p \le q}$, что позволяет учесть нелинейные комбинации признаков; (d) сжатие результата до фиксированной размерности 2048 методом усечённого сингулярного разложения (SVD — Singular Value Decomposition), которое выделяет наиболее значимые направления в расширенном пространстве; (e) обучение линейной логистической регрессии на сжатом представлении. Квадратичное расширение позволяет проверить, содержат ли нелинейные комбинации главных динамических мод существенную информацию для разделения классов, без перехода к невыпуклой оптимизации.

3.4.5. Анализ пространства признаков: методология томографии

Для количественного анализа того, как выбор признаков и физических ресурсов формирует структуру пространства признаков, вводится методология *томографии* — спектрально-метрический анализ эмпирической ядерной матрицы при контролируемых вариациях параметров (включение/исключение признаков синхронизации, уменьшение числа считывающих узлов). По аналогии с медицинской томографией, реконструирующей внутреннюю структуру по множеству проекций, данная методология направлена на выявление эффективных вычислительных степеней свободы, скрытых в физическом субстрате. Используются три инструмента анализа.

1. Эффективная размерность (d_{eff}). Эта метрика из статистической теории обучения [199] количественно оценивает число значимых направлений в пространстве признаков при заданном масштабе регуляризации λ:

$$d_{\text{eff}}(\lambda) = \operatorname{Tr}\left[\mathbf{K}_c(\mathbf{K}_c + \lambda \mathbf{I})^{-1}\right] = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda}, \tag{3.31}$$

где $\mathbf{K}_c$ — центрированная матрица Грама, $\{\lambda_i\}$ — её собственные значения. Спектр $\{\lambda_i\}$ отражает главные вычислительные моды, поддерживаемые физическим откликом, тогда как $d_{\text{eff}}(\lambda)$ подсчитывает, сколько из этих мод остаются значимыми на данном масштабе.

2. Центрированное выравнивание (Centered Kernel Alignment, CKA). Для оценки согласованности структуры пространства признаков с конкретной задачей классификации используется центрированное выравнивание ядерных матриц [200]. Для центрированной матрицы $\mathbf{K}^c_{\text{phys}}$, полученной из отклика цепочки, и целевой матрицы, построенной из меток классов $\mathbf{K}_{\text{task}} = \mathbf{y}\,\mathbf{y}^\top$ (где $\mathbf{y}$ — вектор, элементы которого равны $+1$ или -1 в зависимости от принадлежности к классу), выравнивание определяется как нормированное скалярное произведение Фробениуса:

$$\mathrm{CKA}(\mathbf{K}_{\text{phys}}, \mathbf{K}_{\text{task}}) = \frac{\left\langle \mathbf{K}^c_{\text{phys}}, \mathbf{K}^c_{\text{task}} \right\rangle_F}{\left\| \mathbf{K}^c_{\text{phys}} \right\|_F \left\| \mathbf{K}^c_{\text{task}} \right\|_F}. \tag{3.32}$$

Высокое значение CKA указывает на то, что структура сходств, порождённая цепочкой ФитцХью–Нагумо, хорошо согласуется с разделением на классы — иными словами, нелинейный фильтр «согласован» с задачей классификации.

3. Относительная ёмкость (C_{rel}). Для скалярного сравнения различных конфигураций считывания (например, подмножеств узлов) с полным вариантом определяется относительная ёмкость путём интегрирования эффективной раз-

мерности по логарифмическому диапазону λ и нормировки на результат полной системы:

$$C_{\text{rel}} = \frac{\int d_{\text{eff}}^{(\text{sub})}(\lambda)\, d\log\lambda}{\int d_{\text{eff}}^{(\text{base})}(\lambda)\, d\log\lambda}. \tag{3.33}$$

Эта величина показывает, какая доля степеней свободы полной системы сохраняется в данной физической конфигурации, и позволяет количественно оценить компромисс между компактностью установки и вычислительными возможностями.

3.4.6. Экспериментальные результаты: эффективность классификации

Вычислительные возможности цепочки под внешним воздействием оценивались на наборе контролируемых задач с границами решений возрастающей геометрической сложности на двумерной входной плоскости. Ключевой аспект методологии — использование *единственной предвычисленной карты откликов*: аналоговая система опрашивалась лишь однажды по полной сетке 51×51 частот воздействия (2601 вход в совокупности), и для каждой последующей задачи переобучался только цифровой считывающий слой. Набор признаков включал DCT-признаки уровня 1 ($D_{\text{DCT}} = 1024$) и, опционально, 45 признаков синхронизации уровня 2 (итого $D = 1069$).

Принцип повторного использования карты откликов состоит в следующем: поскольку отображение $\mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$ определяется исключительно динамикой цепочки и не зависит от конкретной задачи классификации, однократно измеренная карта может применяться для произвольного числа задач, определённых на том же входном пространстве $[0, 1]^2$. Новому обучению подлежит лишь линейный считывающий слой.

Задачи классификации. Исследовались три синтетические задачи бинар-

ной классификации на единичном квадрате $[0, 1]^2$:

- `line` — линейно разделимая задача;
- `circle` — нелинейная задача с гладкой границей (окружность);
- `chk8` — задача высокой сложности «шахматная доска» 8×8 с мелкомасштабной чередующейся структурой меток.

Для предотвращения совпадения границ шахматной доски с узлами сетки воздействия вводилось фиксированное глобальное смещение. Производительность оценивалась методом 5-кратной перекрёстной проверки (кросс-валидации — разбиения данных на 5 частей, поочерёдного обучения на 4 из них и проверки на оставшейся); для анализа компактных конфигураций использовалась вложенная перекрёстная проверка.

Основные результаты (рис. 3.28a). Задачи `line` и `circle` решались с почти идеальной точностью (AUC $\geq 0{,}968$) даже линейным сумматором на DCT-признаках. Это указывает на то, что динамика цепочки под внешним воздействием естественным образом создаёт линейно разделимое представление для задач с гладкими границами решений.

Задача `chk8` оказалась существенно более сложной и является главным диагностическим инструментом. Линейный классификатор, обученный непосредственно на входных координатах (x_1, x_2), работал на уровне случайного угадывания (AUC $\approx 0{,}5$), подтверждая, что вычислительная мощность не проистекает из самого частотного кодирования входа. Настроенный RBF-SVM (метод опорных векторов с радиальной базисной функцией [195]) — программный нелинейный классификатор — достиг AUC $= 0{,}643$.

Физический резервуар даже с линейным сумматором на DCT-признаках дал AUC $= 0{,}646$. Этот результат сопоставим с программным классификато-

ром, несмотря на существенные различия: в случае физического резервуара оптимизации подлежит лишь линейный сумматор (выпуклая задача), а нелинейное преобразование определяется фиксированной предвычисленной картой откликов, тогда как RBF-SVM оптимизирует и ядерную функцию, и разделяющую гиперплоскость.

Роль коллективной синхронизации. Дополнение вектора признаков мерами синхронизации между узлами улучшило линейную производительность до $\mathrm{AUC} = 0{,}685$. Это показывает, что коллективная динамика, обусловленная резистивной связью, содержит информацию о входе, недоступную в локальных спектрах отдельных узлов. В терминах радиофизики: волновые взаимодействия в активной среде создают дополнительные *пространственные моды* отклика, несущие информацию о входном воздействии.

Роль нелинейных межмодовых взаимодействий. Наиболее значительный прирост производительности достигнут иерархическим квадратичным сумматором Poly2: $\mathrm{AUC} = 0{,}831$. Этот результат воспроизводился как на DCT-признаках, так и на полном наборе DCT+coh-признаков, что указывает на то, что именно квадратичное расширение существенно для разрешения мелкомасштабных чередований меток. Физическая интерпретация: попарные произведения главных мод отклика эффективно описывают продукты нелинейного смешивания, несущие информацию о тонкой структуре входного пространства.

3.4.7. Анализ структуры пространства признаков

Для интерпретации различий производительности в терминах структуры пространства признаков применялась методология томографии (рис. 3.29).

Влияние характеристик синхронизации на спектр ядерной матрицы. Дополнение DCT-признаков характеристиками синхронизации (DCT+coh) при-

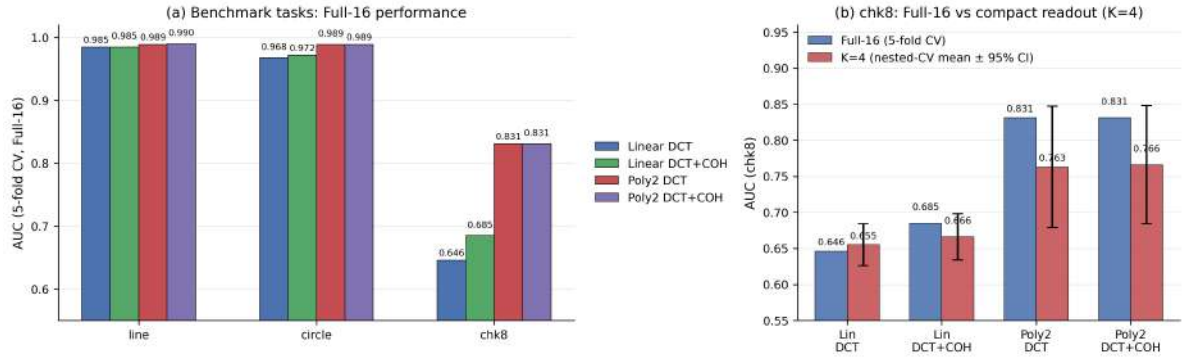

Рис. 3.28 – Производительность физического резервуара на задачах классификации и анализ компактных конфигураций. (а) AUC полной 16-узловой системы (5-кратная перекрёстная проверка) на задачах `line`, `circle`, `chk8` для четырёх конфигураций считывающего слоя: линейный DCT, линейный DCT+coh, Poly2 DCT, Poly2 DCT+coh. (б) Задача `chk8`: сравнение полной 16-узловой системы и компактной конфигурации с $K = 4$ узлами (вложенная перекрёстная проверка; среднее $\pm$ 95% доверительный интервал по внешним фолдам), демонстрирующее компромисс точность–компактность.

водит к изменению спектра центрированной матрицы Грама $\mathbf{K}_c$ (рис. 3.29а): возрастает число значимых собственных значений, что указывает на увеличение эффективной размерности пространства признаков. Количественно это выражается в $d_{\text{eff}}(\lambda)$ (рис. 3.29б), которая возрастает в широком диапазоне масштабов регуляризации λ при включении характеристик синхронизации. Данный результат показывает, что характеристики, обусловленные связью между генераторами, описывают дополнительные *независимые* степени свободы, расширяя вычислительную ёмкость физического резервуара.

Компактные конфигурации. Исследовался компромисс между вычислительными возможностями и физическими ресурсами путём анализа конфигураций с уменьшенным числом считывающих узлов. Относительная ёмкость C_{rel} (рис. 3.29в) количественно оценивает потерю степеней свободы: использование 4 или 5 равномерно расположенных узлов сохраняет приблизительно 32,5% и 39,5% соответственно от полной ёмкости 16-узловой системы.

Для оценки практического влияния этого сокращения проведён экспери-

мент на задаче chk8 с подмножеством из $K = 4$ узлов, выбранным методом последовательного прямого отбора (на каждом шаге добавляется узел, дающий наибольший прирост производительности) и оценённым методом вложенной перекрёстной проверки (рис. 3.28б). Производительность закономерно снижается по сравнению с полной системой, однако качественная иерархия считывающих слоёв сохраняется: Poly2 остаётся существенно эффективнее линейного сумматора даже при ограниченном числе физических датчиков. Это подтверждает, что нелинейные комбинации динамических мод содержат информацию для разделения классов независимо от размера подсистемы считывания.

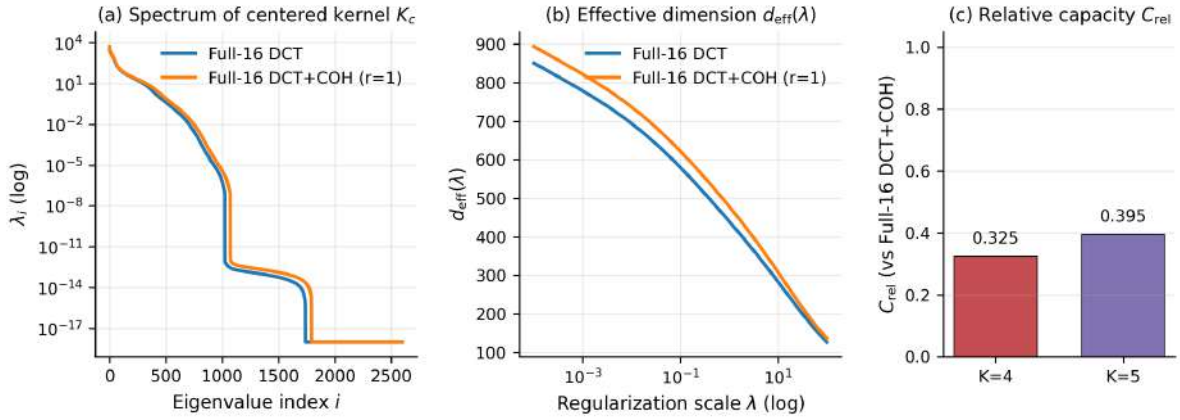

Рис. 3.29 – Анализ пространства признаков физического резервуара (полная 16-узловая система). (а) Спектр собственных значений центрированной матрицы Грама $\mathbf{K}_c$ для признаков DCT (синий) и DCT+coh (красный); более медленное убывание спектра DCT+coh указывает на большее число значимых вычислительных мод. (б) Эффективная размерность $d_{\text{eff}}(\lambda)$ как функция масштаба регуляризации; кривая DCT+coh проходит выше в широком диапазоне λ. (в) Относительная ёмкость C_{rel} для равномерно расположенных компактных конфигураций ($K = 4, 5$ узлов), нормированная на полную 16-узловую систему с признаками DCT+coh.

3.4.8. Обобщение на реальные акустические данные: классификация гласных

Для исследования обобщаемости физического резервуара за пределы синтетических задач проведено исследование с использованием реальных акусти-

ческих данных из корпуса гласных Хилленбранда. В этом наборе данных каждый образец гласного представлен двумя первыми формантными частотами (F_1, F_2), определяющими двумерную акустическую плоскость. Эта плоскость отображалась на входное пространство системы $[0, 1]^2$ посредством робастной нормализации, после чего каждый акустический образец присваивался ближайшей точке на сетке воздействия 51×51, использованной для генерации карты откликов. Следует подчеркнуть, что *никаких новых аппаратных измерений не проводилось*: для каждого образца извлекался соответствующий предвычисленный вектор признаков.

Для бинарной пары гласных ey и eh (различающихся степенью подъёма языка, что проявляется в близости формантных частот) признаки физического резервуара обеспечили высокую разделимость: AUC $= 0{,}963$ с линейным сумматором и AUC $= 0{,}964$ с Poly2 (рис. 3.30б). Близость результатов двух сумматоров указывает на то, что физическое отображение признаков уже создаёт представление, пригодное для линейного разделения данной пары гласных.

Далее задача была расширена до 12-классовой классификации гласных. Используя те же предвычисленные признаки, многоклассовая (мультиномиальная, то есть обобщённая на произвольное число классов) логистическая регрессия достигла общей точности 51,6% (рис. 3.30в). Основные ошибки классификации приходились на акустически близкие гласные, что согласуется с фонетическими ожиданиями и показывает, что карта откликов резервуара содержит нетривиальную структуру, пригодную для работы с реальными данными.

Данный эксперимент иллюстрирует принцип «*измерить однажды — использовать многократно*»: одна и та же предвычисленная карта откликов цепочки ФитцХью–Нагумо может использоваться для различных задач классификации, определённых на одном и том же двумерном входном пространстве.

Возможность повторного использования карты откликов является прямым следствием того, что физическое отображение определяется динамикой устройства, а не конкретной задачей.

3.4.9. Выводы

Экспериментальная реализация физического резервуара на цепочке генераторов ФитцХью–Нагумо подтверждает работоспособность резервуарного подхода в аналоговом аппаратном исполнении: нелинейное смешивание частот при волновых взаимодействиях создаёт широкополосный спектр комбинационных частот, обеспечивающий высокоразмерное отображение входных данных, а разработанная методология томографии ядра (d_{eff}, CKA, C_{rel}) позволяет количественно оценивать вычислительную ёмкость устройства. Вместе с тем физический резервуар демонстрирует и принципиальные ограничения архитектуры с фиксированными внутренними связями: нелинейное отображение определяется динамикой устройства и не может быть перестроено под конкретную задачу. Возникает вопрос: *где проходит граница между возможностями фиксированного резервуара и полносвязно обучаемой сети?* В следующем разделе этот вопрос исследуется систематически: сопоставляются структуры пространства состояний в резервуарах и в рекуррентных сетях, все параметры которых — включая внутренние связи — настраиваются методом обратного распространения ошибки во времени, и показывается, что полносвязное обучение приводит к качественно иной организации фазового пространства.

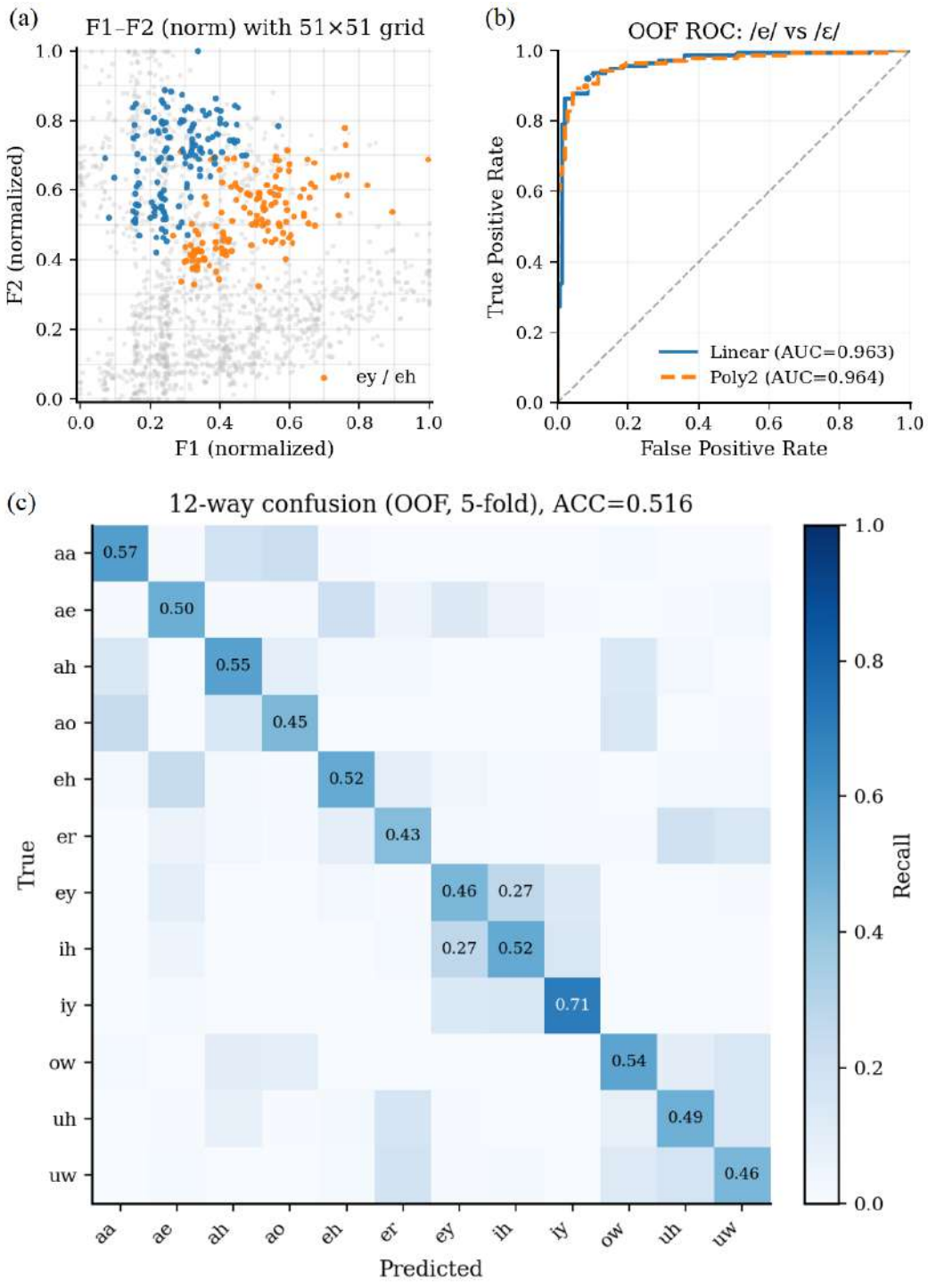

Рис. 3.30 – Классификация гласных с использованием единственной предвычисленной карты откликов. (а) Образцы гласных Хилленбранда на нормированной плоскости (F_1, F_2); сетка воздействия 51×51 показана точками; выделена бинарная пара ey/eh. (б) ROC-кривые (5-кратная перекрёстная проверка) для пары ey/eh: линейный сумматор (AUC $= 0{,}963$) и Poly2 (AUC $= 0{,}964$). (в) Построчно нормированная матрица ошибок (5-кратная перекрёстная проверка) для 12-классовой задачи; многоклассовая логистическая регрессия на тех же признаках физического резервуара; общая точность ACC $= 0{,}516$.

3.5. Структура фазового пространства и компактность представления в резервуарных и полностью обучаемых рекуррентных сетях

Физический резервуар на основе цепочки ФитцХью–Нагумо, исследованный в предыдущем разделе, наглядно продемонстрировал как силу, так и принципиальные ограничения архитектуры с фиксированными внутренними связями: нелинейное отображение определяется динамикой устройства и не может быть изменено под конкретную задачу — обучению подлежит лишь линейный выходной сумматор. Возникает естественный вопрос: *где проходит принципиальная граница между возможностями фиксированного резервуара и полностью обучаемой сети?* Настоящий раздел посвящён систематическому сопоставлению этих двух парадигм с позиций структуры фазового пространства (организации траекторий скрытых состояний сети в многомерном пространстве активностей) и компактности представления (минимального числа независимых переменных, необходимых для описания динамики сети при решении задачи).

С точки зрения радиофизики различие между двумя парадигмами можно сформулировать следующей аналогией: фиксированный резервуар — это широкополосный, но ненастроенный радиоприёмник, из выходного сигнала которого нужную станцию приходится выделять сложной постобработкой; полностью обучаемая рекуррентная сеть — это приёмник с перестраиваемой внутренней схемой, который активно подавляет помехи, перестраивая собственные контуры под частоту полезного сигнала. Результаты настоящего раздела дают количественное обоснование этой аналогии.

3.5.1. Введение и постановка задачи

Резервуарные вычисления и их ограничения. Парадигма резервуарных вычислений постулирует, что достаточно большая нелинейная рекуррентная сеть с фиксированными внутренними связями может служить универсальным вычислительным субстратом, проецируя входные последовательности в высокоразмерное пространство, где даже линейный выходной сумматор способен решать сложные задачи [19, 20]. Эта идея математически обоснована теоремами об универсальности [201] и реализована на разнообразных физических субстратах [149, 202]. Вместе с тем «грубая» проекция в высокоразмерное пространство может порождать избыточные, перепутанные представления, затеняющие внутреннюю структуру задачи [203, 204]. Количественная характеристика таких ограничений стала возможной благодаря топологическим инструментам.

Полностью обучаемые рекуррентные сети. Альтернативный подход — полносвязное обучение всех параметров рекуррентной сети (оптимизация методом обратного распространения ошибки через время, BPTT) — реализован в архитектурах с вентильными механизмами: управляемых рекуррентных блоках (GRU — Gated Recurrent Unit) [47] и сетях с долгой краткосрочной памятью (LSTM — Long Short-Term Memory) [48]. Показано, что в ходе обучения формируется внутренняя динамика, поддерживающая генерацию сложных пространственно-временных паттернов, робастное накопление информации и многозадачные вычисления.

Минимальная реализация и нейронные многообразия. Концепция минимальной реализации из теории управления утверждает, что для любого заданного отображения входа в выход существует представление в пространстве состояний минимальной размерности, которое одновременно управляемо и наблюда-

емо [205, 206]. Параллельно гипотеза нейронных многообразий предполагает, что сети решают задачи, ограничивая высокоразмерную активность низкоразмерными многообразиями, согласованными со скрытыми переменными задачи [207, 208]. Однако прямое количественное сопоставление структуры фазового пространства, сформированной фиксированным резервуаром и полностью обучаемой сетью на одной и той же задаче, до настоящей работы не проводилось.

Постановка задачи. Цель настоящего раздела — установить, приводит ли полносвязное обучение всех параметров рекуррентной сети к качественно иной структуре фазового пространства по сравнению с фиксированным резервуаром, и если да — охарактеризовать это различие количественно. Конкретно ставятся следующие вопросы:

1. Как масштабируется ошибка фиксированного резервуара и обучаемой сети с ростом длины запоминаемой последовательности (горизонта памяти — максимального числа временн'ых шагов, на протяжении которых сеть должна удерживать информацию о прошлых входных сигналах)?

2. Какова структура фазового пространства скрытых состояний — перекрываются ли области, соответствующие различным вычислительным режимам, или они глобально разделены?

3. Какие спектральные моды формирует обучение для реализации требуемой динамики?

4. Существует ли компромисс между точностью и компактностью представления, и как он различается между парадигмами?

3.5.2. Задача контекстно-зависимой интеграции

Для количественного сравнения фиксированных и обучаемых архитектур используется задача контекстно-зависимой интеграции — канонический тест, требующий одновременно долговременного хранения накопленного сигнала и быстрого переключения режимов работы [26, 209]. На каждом временно́м шаге t сеть получает трёхмерный входной вектор $\mathbf{x}_t = [d_t,\, c_{A,t},\, c_{B,t}]^\top$ и должна предсказать скрытое состояние S_t, эволюция которого определяется контекстом:

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} + d_t & \text{контекст A (интеграция)}, \\ d_t & \text{контекст B (сброс)}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Входной сигнал d_t выбирается из равномерного распределения $U[-1, 1]$, а редкие взаимоисключающие импульсы $c_{A,t}$ и $c_{B,t}$ сигнализируют о переключении между двумя динамическими режимами (рис. 3.31а).

Сформулированная задача требует от любой успешной сети реализации двух принципиально различных вычислительных режимов — медленного накопления (интеграции) и мгновенного переключения (сброса) — и осуществления контекстно-зависимого выбора между ними на основе внешних управляющих сигналов. В терминах радиофизики: сеть должна одновременно реализовывать функцию фильтра нижних частот с большой постоянной времени (накопление) и функцию переключателя (мгновенный сброс накопленного состояния), выбирая между этими режимами по внешней команде.

Задача исследовалась в двух конфигурациях:

- Масштабирование памяти: длина последовательности варьировалась $T \in \{20, 50, 100, 200\}$ при низкой вероятности переключения $p_{\text{switch}} = 0{,}05$.

- Анализ структуры фазового пространства: фиксированная длина $T = 50$ при высокой частоте переключений $p_{\text{switch}} = 0{,}1$.

3.5.3. Исследуемые архитектуры сетей

Для систематического сопоставления парадигм фиксированной и обучаемой динамики рассматривается набор рекуррентных архитектур (нелинейных сетей активных элементов с обратной связью), реализованных в PyTorch.

Сеть эхо-состояний (Echo State Network, ESN — нелинейная рекуррентная сеть с фиксированными внутренними связями и обучаемым линейным выходным сумматором) представляет парадигму резервуарных вычислений. Её рекуррентная матрица $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ случайно инициализируется и остаётся фиксированной; спектральный радиус устанавливается $\rho = 0{,}9$ для обеспечения эхо-свойства (затухания влияния начальных условий) [210]. Настройка осуществляется исключительно обучением линейного считывающего слоя методом регрессии с ℓ_2-регуляризацией (гребневая регрессия).

Вентильные рекуррентные блоки (GRU) [47] и сети с долгой краткосрочной памятью (LSTM) [48] представляют парадигму адаптивного формирования динамики: все их параметры оптимизируются полносвязным образом методом Adam (скорость обучения 10^{-3}, регуляризация весов 10^{-5}), что позволяет сети активно формировать структуру и динамику собственного фазового пространства.

Для разделения вкладов архитектурных априорных знаний (вентильные механизмы) и самого процесса обучения введены две контрольные модели:

- Обучаемая ESN — структурно идентична стандартной ESN, но все её веса (включая рекуррентную матрицу) оптимизируются полносвязным образом. Это позволяет выяснить, достаточно ли одного лишь обучения для

достижения эффективного представления, или необходимы архитектурные априорные знания.

- Чисто линейная RNN — рекуррентная сеть без нелинейности активации. Обученная матрица динамики $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ может быть разложена по собственным значениям и собственным векторам, что обеспечивает анализ динамических мод.

3.5.4. Методы анализа эффективности и динамических механизмов

Анализ построен так, чтобы связать метрики производительности со структурами фазового пространства и динамическими характеристиками.

Функциональная производительность оценивалась по среднеквадратичной ошибке (MSE) между предсказанием сети и истинным состоянием S_t; для каждого условия приводятся среднее и стандартное отклонение по 10 независимым инициализациям.

Структура фазового пространства скрытых состояний исследовалась с помощью двух методов:

- UMAP (Uniform Manifold Approximation and Projection) — метод нелинейного снижения размерности, основанный на аппроксимации данных структурой риманова многообразия и последующей оптимизации низкоразмерного представления. В отличие от линейного метода главных компонент (PCA), UMAP сохраняет как локальную, так и глобальную топологическую структуру данных, что делает его особенно эффективным для визуализации кластеров и многообразий в высокоразмерных пространствах [211]. Метод применён для визуализации траекторий фазового пространства.

- Внутренняя размерность $\mathrm{ID}_{95\%}$ — минимальное число главных компонент (PCA — метод главных компонент), необходимое для объяснения 95% дисперсии активности скрытых состояний. Меньшее значение $\mathrm{ID}_{95\%}$ означает более компактное, согласованное с задачей кодирование.

Спектральный анализ динамики проводился на чисто линейной рекуррентной нейронной сети. Модули собственных значений $|\lambda_i|$ обученной матрицы $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ характеризуют природу динамических мод: $|\lambda| < 1$ — сжимающие моды (обеспечивающие устойчивость и быстрое затухание переходных процессов), $|\lambda| \approx 1$ — почти нейтральные моды (поддерживающие длительное накопление сигнала без затухания).

3.5.5. Динамическая память и пределы резервуарных сетей

Первый ключевой результат состоит в обнаружении фундаментального разрыва производительности, нарастающего с увеличением горизонта памяти (рис. 3.31б). Фиксированный резервуар ESN демонстрирует выраженный рост ошибки при увеличении длины последовательности T: MSE возрастает от $0{,}991$ при $T = 20$ до $4{,}435$ при $T = 200$. Эта неспособность поддерживать точность на длинных горизонтах отражает внутренние ограничения фиксированной случайной динамической системы: память резервуара затухает на характерном временно́м масштабе, определяемом спектральным радиусом ρ рекуррентной матрицы.

В отличие от этого, обучаемые сети GRU и LSTM деградируют существенно медленнее. Ошибка GRU при $T = 200$ составляет лишь $2{,}258$ — примерно вдвое меньше, чем у ESN. Существенно, что разрыв производительности *расширяется* с ростом T: полносвязное обучение успешно формирует рекуррентную динамику, обеспечивающую более точное и робастное накопление

сигнала на длительных временны́х интервалах — результат, недоступный для статического резервуара с его фиксированным спектром.

3.5.6. Разделение контекстов в фазовом пространстве

Для выявления механизма, лежащего в основе разрыва производительности, исследована структура фазового пространства скрытых состояний сетей. Проекции UMAP (рис. 3.32) выявляют два качественно различных организационных принципа.

При анализе обученной сети GRU установлено, что её фазовое пространство разделено на глобально непересекающиеся области для контекстов «интеграция» (A) и «сброс» (B). Такое разделение, наблюдаемое как на крупном, так и на тонком масштабах, обеспечивает устойчивый субстрат для вычислений, минимизируя взаимное влияние (перекрёстные помехи) между двумя операционными режимами (рис. 3.32б).

Фиксированный резервуар ESN, напротив, демонстрирует принципиально иную картину. Хотя в малых периферических областях наблюдается некоторая контекстная специфичность, основные высокоплотные области для контекстов A и B в значительной степени перекрываются (рис. 3.32а). Фиксированный резервуар не способен полностью разделить два вычислительных режима: они сосуществуют в общем высокоразмерном объёме фазового пространства. Это перекрытие областей непосредственно объясняет деградацию производительности ESN: линейный выходной сумматор вынужден разделять перекрывающиеся облака состояний, что становится всё труднее с ростом горизонта памяти.

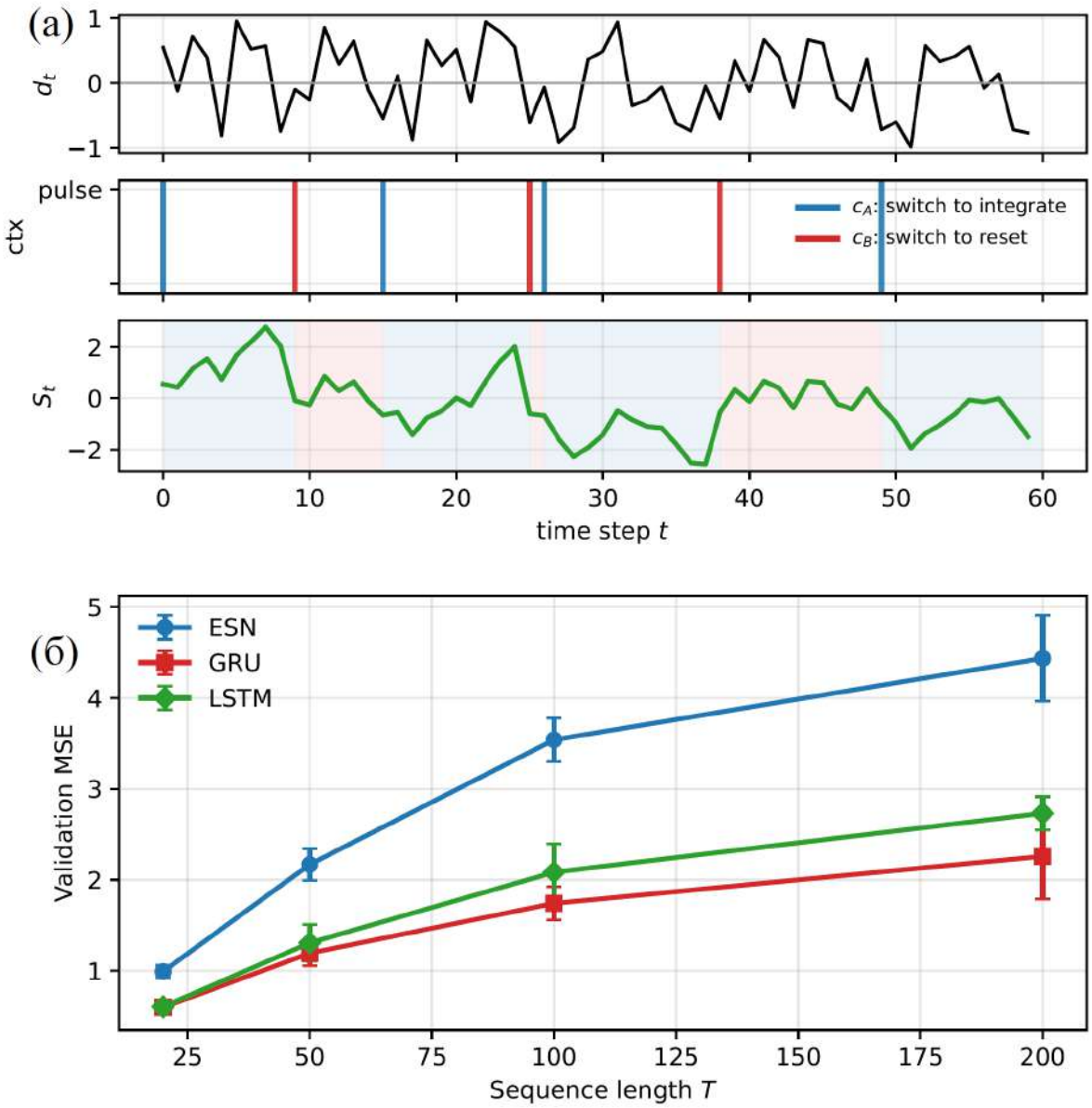

Рис. 3.31 – Задача контекстно-зависимой интеграции и масштабирование памяти. (а) Репрезентативная последовательность: входной сигнал $d_t \sim U[-1, 1]$, управляющие импульсы c_A и c_B, целевое состояние S_t. Задача требует одновременно медленного накопления и мгновенных переключений. (б) Среднеквадратичная ошибка (MSE) на валидационной выборке как функция длины последовательности T (среднее $\pm$ стандартное отклонение по 10 независимым инициализациям, $p_{\text{switch}} = 0{,}05$). Обучаемые RNN (GRU, LSTM) демонстрируют более медленный рост ошибки; разрыв с фиксированной ESN нарастает с ростом T.

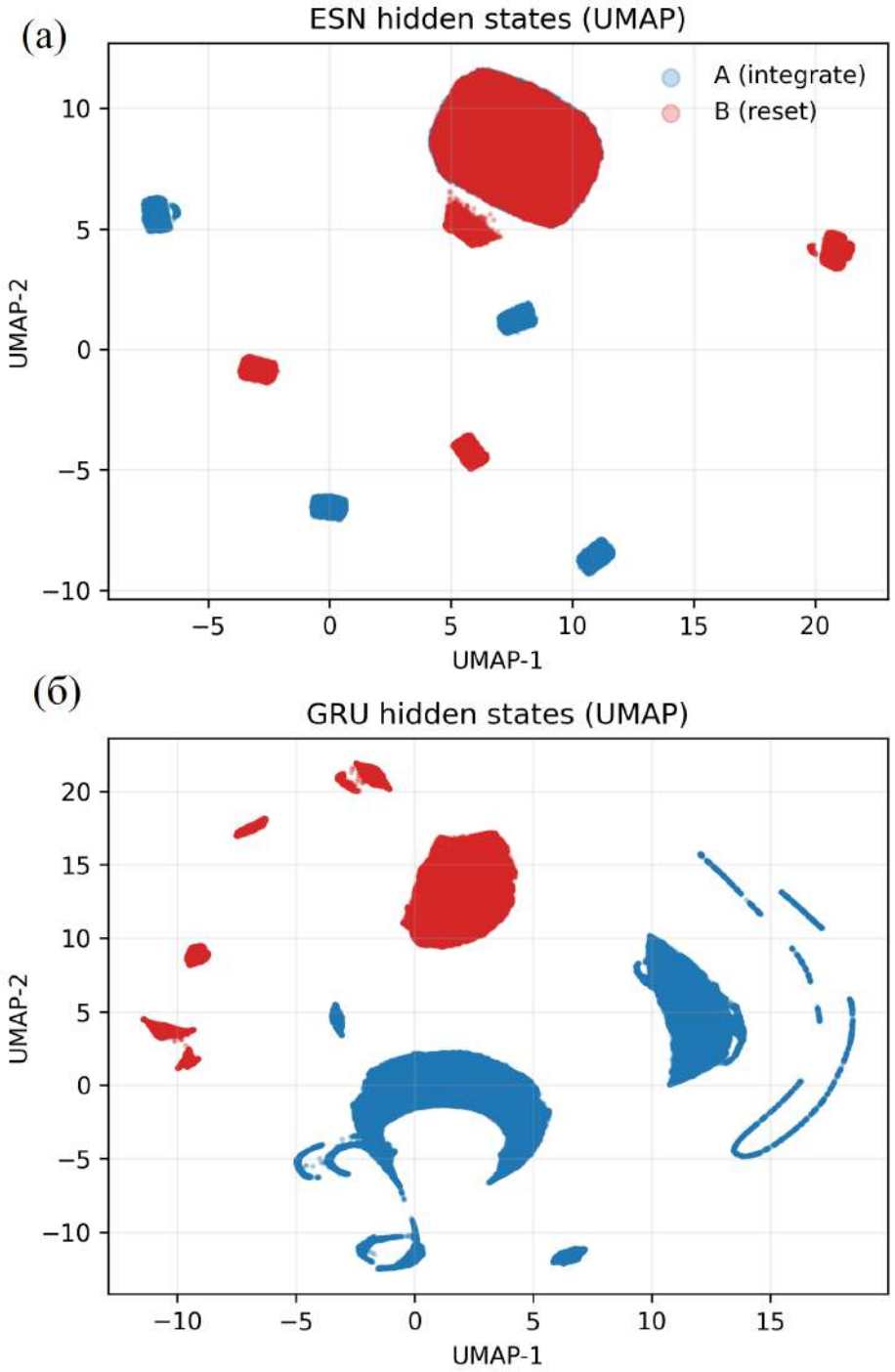

Рис. 3.32 – Структура фазового пространства скрытых состояний для двух парадигм ($T = 50$, $p_{\text{switch}} = 0{,}1$). (а) В фиксированном резервуаре ESN основные области активности для контекстов A (синий) и B (красный) почти совпадают — контексты частично разделены лишь на периферии. (б) Обученная сеть GRU разделяет контексты в глобально непересекающиеся многообразия, уменьшая перекрёстные помехи между режимами. Проекция UMAP; цвет кодирует контекст.

3.5.7. Собственные значения матрицы редуцированной модели

Структура фазового пространства в конечном счёте определяется динамикой системы. Для выявления фундаментальных мод обучена чисто линейная RNN — упрощённая модель, обученная рекуррентная матрица $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ которой может быть разложена по собственным значениям и собственным векторам. На рис. 3.33 показаны модули собственных значений $|\lambda_i|$ для сетей, обученных задаче чистой интеграции (без сброса) и полной задаче с переключениями.

В ходе обучения формируются динамические компоненты, согласованные со структурой задачи:

- Единственное собственное значение с модулем, близким к единице ($|\lambda| \approx 1$), формирует линию устойчивых неподвижных точек — одномерное подпространство, вдоль которого состояние системы может дрейфовать без затухания, реализуя накопление сигнала.

- Остальные моды остаются сжимающими ($|\lambda| < 1$), обеспечивая устойчивость и быстрое затухание переходных процессов.

- Добавление требования сброса систематически перестраивает сжимающую часть спектра: появляются дополнительные быстро затухающие моды, отражающие необходимость не только накапливать сигнал, но и мгновенно подавлять накопленное состояние.

Данный результат демонстрирует, что обучение формирует спектр рекуррентной матрицы, согласованный со структурой задачи, — прямой аналог настройки собственных частот колебательной системы под требуемую передаточную функцию.

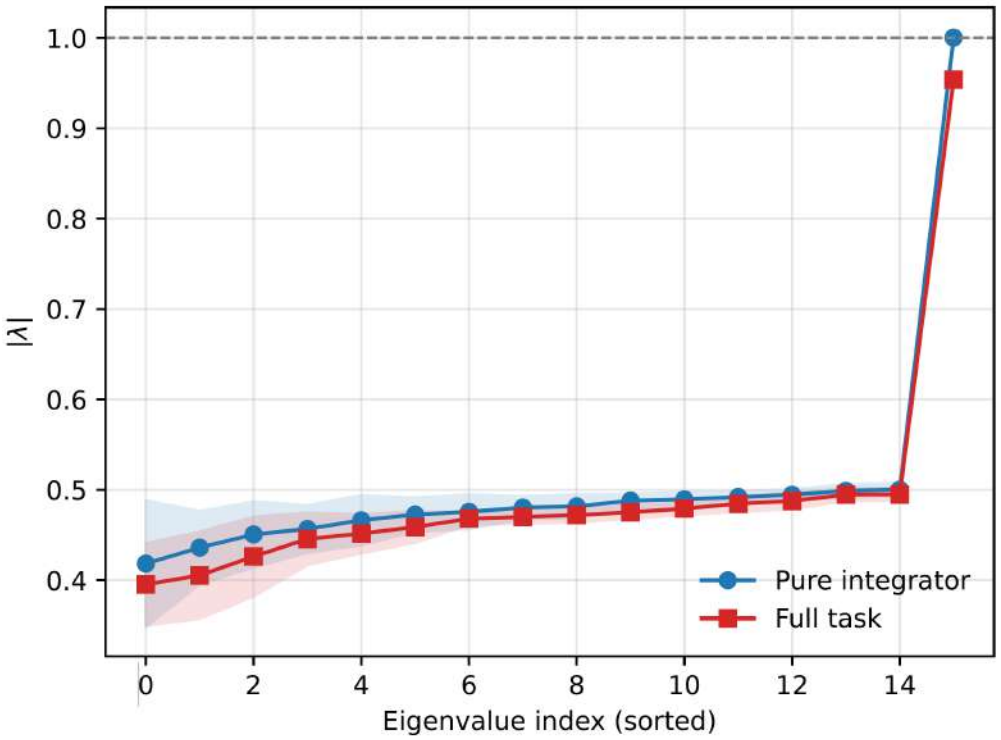

Рис. 3.33 – Обученный спектр линейной рекуррентной сети (среднее $\pm$ стандартное отклонение по 10 инициализациям). Модули собственных значений $|\lambda_i|$ рекуррентной матрицы $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ для задачи чистой интеграции (синий) и полной задачи с переключениями (красный). В ходе обучения формируется единственная мода с $|\lambda| \approx 1$ для накопления сигнала; остальные моды сжимающие. Полная задача перестраивает сжимающую часть спектра для реализации динамики сброса.

3.5.8. Граница эффективности: точность и компактность представления

Обобщающий результат представлен на рис. 3.34, где ошибка предсказания (MSE) показана как функция сложности представления — внутренней размерности $\mathrm{ID}_{95\%}$. Численные значения для всех моделей приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Производительность, компактность представления и число параметров на границе эффективности ($T = 50, p_{\text{switch}} = 0{,}1$; среднее $\pm$ стандартное отклонение по 10 инициализациям).

Модель	Вариант	Параметры	MSE	$\mathrm{ID}_{95\%}$
ESN	res300	300	$1{,}557 \pm 0{,}098$	$15{,}6 \pm 1{,}5$
Обуч. ESN	res300	91 201	$0{,}572 \pm 0{,}149$	$26{,}0 \pm 2{,}5$
GRU	hid32	3 585	$0{,}416 \pm 0{,}035$	$5{,}0 \pm 0{,}0$
GRU	hid64	13 313	$0{,}388 \pm 0{,}068$	$6{,}0 \pm 0{,}0$
GRU	hid96	29 185	$0{,}352 \pm 0{,}043$	$6{,}1 \pm 0{,}3$
GRU	hid128	51 201	$0{,}353 \pm 0{,}065$	$6{,}5 \pm 0{,}5$

Фиксированная ESN экономна по числу обучаемых параметров (300), однако при этом характеризуется высокой ошибкой (MSE $= 1{,}56$) и умеренно высокоразмерным представлением (ID $= 15{,}6$). Переход к обучаемой ESN снижает ошибку до $0{,}57$, однако сопровождается существенным ростом внутренней размерности: она почти удваивается до $26{,}0$, а число параметров возрастает до 91 201. Это указывает на неэффективный способ улучшения точности — путём расширения в ещё более высокоразмерное представление без его структурной организации.

Модели GRU занимают качественно иную область пространства «ошибка–размерность». Они достигают низкой ошибки (MSE $\approx 0{,}35$–$0{,}42$) при компактном представлении (ID $\approx$ 5–$6{,}5$). GRU всего с $3\,585$ параметрами превосходит обучаемую ESN (91 201 параметров) как по ошибке, так и по компактности представления. Это демонстрирует, что вентильные архитектуры не просто обу-

чаются решать задачу — в ходе обучения формируется минимальная реализация требуемой динамики, согласованная со структурой задачи.

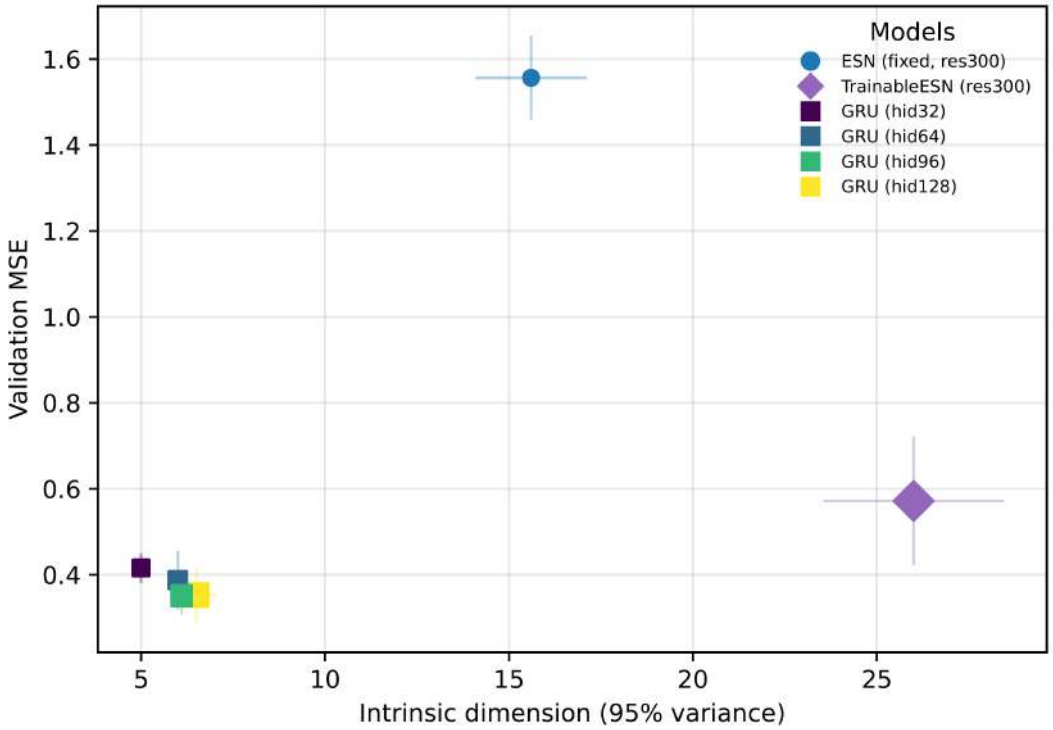

Рис. 3.34 – Граница эффективности ($T = 50$, $p_{\text{switch}} = 0{,}1$; среднее $\pm$ стандартное отклонение по 10 инициализациям). Среднеквадратичная ошибка (MSE) как функция внутренней размерности ($\text{ID}_{95\%}$). Размер маркера пропорционален числу обучаемых параметров. GRU занимают оптимальную область низкой ошибки и низкой размерности (Парето-фронт — множество решений, для которых невозможно улучшить один критерий без ухудшения другого). Обучаемая ESN снижает ошибку по сравнению с фиксированной ESN, но за счёт значительного роста как внутренней размерности, так и числа параметров.

3.5.9. Выводы

Систематическое сопоставление фиксированного резервуара (ESN) и полносвязно обучаемых рекуррентных сетей (GRU, LSTM) на задаче контекстно-зависимой интеграции показало, что переход от резервуарных вычислений к полному обучению — не просто количественное улучшение точности, а качественная перестройка структуры фазового пространства: сжатие внутренней размерности представления (ID $\approx$ 5–6 у GRU против $\approx$ 15–16 у ESN), глобальное

разделение контекстов и формирование моды с $|\lambda| \approx 1$ для реализации интеграции. Обучаемая ESN без вентильных механизмов снижает ошибку, но за счёт раздувания размерности до ID $\approx$ 26, что подтверждает роль архитектурных априорных знаний для достижения компактных решений. Разрыв производительности нарастает с увеличением горизонта памяти ($T = 20 \to 200$), устанавливая фундаментальное ограничение фиксированной архитектуры. Этот вывод получен для сетей с непрерывной динамикой. В следующей главе исследуется, какие динамические структуры — аттракторы, метастабильные состояния, бифуркации — формируются при полном обучении сетей, включая спайковые модели (LIF, AdEx), и как эти структуры связаны с конкретными вычислительными функциями.

3.6. Заключение к главе 3

Третья глава диссертации посвящена систематическому исследованию резервуарных сетей — нелинейных сетей активных элементов, в которых фиксированная рекуррентная структура выступает как физический нелинейный преобразователь, а обучению подвергается исключительно выходной линейный сумматор (или, в случае архитектуры FORCE, выходной сумматор с обратной связью к резервуару). Исследованы аттракторный и переходный механизмы реализации функциональности, топологические и геометрические методы анализа вычислительных режимов, экспериментальная реализация физического резервуара и сопоставление фиксированных резервуаров с полносвязно обучаемыми рекуррентными сетями. Основные результаты главы, опубликованные в работах [A12–A20], состоят в следующем.

1. *Принцип согласования временных масштабов и формирование упоря-*

доченной коллективной динамики. Для двух типов элементов — непрерывных частотных нейронов и дискретных спайковых отображений Курбажа–Некоркина — установлено, что эффективность обучения резервуара методом FORCE максимальна при согласовании внутреннего временно́го масштаба элементов с характерным периодом целевого паттерна ($\tau_{\text{opt}} \sim 1/\omega$ и аналогичная зависимость на плоскости $(\varepsilon, f_{\text{targ}})$). Обучение *только* выходного сумматора приводит к глубокой перестройке пространственно-временно́й структуры всей сети: формированию антифазных кластеров в однородном резервуаре и волноподобных структур при контролируемой ε-гетерогенности, расширяющей частотный базис ансамбля.

2. *Спектральный механизм формирования автономных аттракторов.* Установлено, что успешное обучение методом FORCE создаёт спектральные выбросы эффективной матрицы связей $\Omega = \mathbf{A}+\mathbf{U}\mathbf{W}^{\top}$ — собственные значения, покидающие круг спектра исходной матрицы. Эти выбросы определяют доминирующие моды автономного аттрактора; их число коррелирует со сложностью целевого паттерна. По-разному инициализированные сети, обученные на одном целевом паттерне, приводят к одинаковым выбросам, что свидетельствует об инвариантности спектральной структуры относительно конкретной реализации. На микроскопическом уровне обнаружен компенсаторный механизм: дисперсия обученных весов убывает с ростом дисперсии активности элементов, обеспечивая согласованное формирование сложных многомерных паттернов.

3. *Переходный механизм вычислений на метастабильных траекториях.* Показано, что в рамках той же резервуарной архитектуры с обучением FORCE для стимул-индуцированных задач обучение не подавляет хаос

($\lambda_1 > 0$), а формирует в хаотическом фазовом пространстве детерминированные метастабильные маршруты, активируемые внешними импульсами. Тип задачи определяет, какой динамический объект формируется: предельный цикл (автономная генерация), хаотический фон с метастабильными маршрутами (дискриминация входов) или их сочетание (переключение между последовательностями).

4. *Принцип вычислительного соответствия.* Сформулирован и количественно подтверждён принцип, связывающий эффективность решения задачи с топологией и геометрией представления в пространстве состояний резервуара. На канонической задаче детекции фазовой когерентности с циклической скрытой структурой (S^1) впервые систематически сопоставлены три физически различных субстрата: частотный, спайковый и осцилляторный. Установлено, что осцилляторный субстрат обеспечивает четырёхкратное преимущество по минимальному размеру резервуара N^*. Обнаружен и разрешён парадокс спайкового резервуара: статическое считывание не воспроизводит циклическую топологию, тогда как динамическое считывание формирует представление с наиболее выраженным циклом H_1 и практически идеальным восстановлением фазы.

5. *Экспериментальная реализация физического резервуара.* Реализован электронный резервуар на цепочке из 16 связанных возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо. Нелинейное смешивание частот при волновых взаимодействиях обеспечивает высокоразмерное отображение входных данных. Разработана методология томографии ядра (d_{eff}, CKA, C_{rel}) для количественной диагностики вычислительной ёмкости физического субстрата. Продемонстрирован принцип «вычислить однажды — использовать

многократно»: однократно измеренная карта откликов успешно применена к различным задачам классификации, включая реальные акустические данные (AUC $= 0{,}963$ на бинарной паре гласных).

6. *Качественное различие между фиксированным резервуаром и полносвязно обучаемой сетью.* Систематическое сопоставление ESN и GRU/LSTM на задаче контекстно-зависимой интеграции установило, что полносвязное обучение формирует качественно иную структуру фазового пространства: сжатие внутренней размерности (ID $\approx$ 5–6 у GRU против $\approx$ 15–16 у ESN), глобальное разделение контекстов и изоляцию моды с $|\lambda| \approx 1$ для реализации интеграции. Разрыв производительности нарастает с увеличением горизонта памяти задачи, устанавливая фундаментальное ограничение фиксированной архитектуры для задач долговременного хранения информации. Сформулирован принцип минимальной реализации: полносвязное обучение действует как поиск представления минимальной размерности, сжимающего вычислительные требования задачи в низкоразмерное геометрически организованное подпространство.

Таким образом, в третьей главе развит радиофизический взгляд на обучение резервуарных сетей как на процесс целенаправленного формирования функциональной динамики в фазовом пространстве системы. Показано, что синтез вычислительных режимов может осуществляться через два принципиально различных механизма — создание аттракторов посредством низкоранговой модификации эффективной матрицы связей с формированием спектральных выбросов или формирование управляемых переходных траекторий, индуцируемых входными стимулами. Введённые топологические характеристики на основе персистентной гомологии и геометрические характеристики на основе декодируемо-

сти скрытых переменных предоставляют количественные методики, связывающие качество выполнения задачи со структурой внутренней динамики. Принцип вычислительного соответствия устанавливает, что эффективность системы определяется согласованностью топологии и геометрии внутреннего представления со скрытой структурой решаемой задачи, что открывает путь к целенаправленному выбору физического субстрата — осцилляторного, частотного или спайкового — и механизма считывания — статического или динамического — под конкретный класс задач. Сопоставление фиксированных резервуаров и полносвязно обучаемых рекуррентных сетей выявило качественный разрыв: полное обучение формирует компактные низкоразмерные представления с глобальным разделением контекстов, недостижимым при фиксированной архитектуре. Этот результат мотивирует переход к следующей главе, в которой исследуются динамические структуры — аттракторы, метастабильные состояния, бифуркации — формирующиеся при полном обучении всех параметров рекуррентных сетей, и устанавливается связь этих структур с конкретными вычислительными функциями.

ГЛАВА 4. ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ В ПОЛНОСТЬЮ ОБУЧАЕМЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СЕТЯХ

В главе 3 исследовались резервуарные сети, в которых настраивается лишь считывающий слой, а внутренние связи остаются фиксированными. Было показано, что даже при таком ограничении формируются аттракторные структуры, обеспечивающие генерацию и классификацию сигналов, однако возможности резервуара ограничены: геометрия его фазового пространства задана начальной инициализацией и не может быть перестроена под задачу произвольной сложности. Настоящая глава посвящена сетям, в которых *все параметры* — входные, рекуррентные и выходные веса — настраиваются в процессе обучения. Полная настройка параметров означает, что обучение деформирует структуру фазового пространства целиком: перемещает неподвижные точки, создаёт и уничтожает аттракторы, перестраивает бассейны притяжения и формирует каналы переходов между режимами. Тем самым полностью обучаемые сети представляют наиболее общий случай управляемой деформации фазового пространства — центрального процесса, исследуемого в диссертации.

Переход от резервуаров к полному обучению ставит ряд вопросов, которым посвящена данная глава. Какие аттракторные структуры возникают при настройке всех связей на конкретную функциональную задачу? Как организуется популяционная активность элементов сети? Зависит ли результат от способа обучения — то есть является ли алгоритм обучения таким же существенным параметром, определяющим структуру фазового пространства, как топология

связей или характеристики отдельных элементов?

Функциональные задачи, рассматриваемые в этой главе, взяты из вычислительной нейронауки (науки о принципах обработки информации в нервной системе) и включают принятие решений, интеграцию непрерывных переменных, переключение между несколькими режимами работы. Выбор таких задач мотивирован двумя обстоятельствами. Во-первых, для них существуют экспериментальные данные о нейронной активности, позволяющие верифицировать модельные предсказания. Во-вторых, каждая из этих задач допускает чёткую формулировку на языке динамики: принятие решений — как конкуренция устойчивых состояний, интеграция — как движение вдоль непрерывного семейства аттракторов, многозадачность — как переключение между различными режимами одной и той же сети.

Ключевое наблюдение, проходящее через всю главу, состоит в том, что функциональные свойства обученных сетей — такие как способность к выбору между альтернативами, хранение информации в рабочей памяти или переключение между задачами — реализуются как устойчивые режимы коллективной динамики. Информация кодируется в структуре фазового пространства (положение аттракторов, форма инвариантных многообразий, расположение бассейнов притяжения), а входные сигналы управляют переходами между режимами. При этом функциональная организация — разделение элементов на специализированные популяции, формирование блочной структуры матрицы связей — не задаётся заранее, а возникает в процессе обучения. Такие самопроизвольно возникающие свойства, отсутствующие у отдельных элементов, но проявляющиеся на уровне системы в целом, в физике сложных систем называют *эмерджентными* (от англ. emergence — возникновение) [212].

Существенным результатом главы является демонстрация того, что две

основные парадигмы обучения — **обучение с учителем** (supervised learning, SL), при котором параметры настраиваются по явному целевому сигналу, и **обучение с подкреплением** (reinforcement learning, RL), при котором настройка управляется скалярным сигналом вознаграждения за конечный результат, — приводят к качественно различным структурам фазового пространства даже при решении одних и тех же задач. Это говорит о том, что способ обучения — один из параметров, определяющих динамику системы наряду с топологией связей и свойствами элементов.

Анализ обученных сетей проводится единым аппаратом нелинейной динамики, применяемым на протяжении всей диссертации: классификация аттракторов и определение их устойчивости по спектрам собственных чисел, построение фазовых портретов, понижение размерности методами главных компонент. Дополнительно используются информационно-теоретические меры (взаимная информация между активностью элементов и параметрами задачи) и популяционный анализ (разложение активности на компоненты, связанные с различными аспектами задачи) [213]. Такой подход позволяет рассматривать обученные рекуррентные нейронные сети (нелинейные сети активных элементов) как динамические системы и описывать их функциональные свойства на едином языке — языке аттракторов, бифуркаций и фазового пространства.

Глава организована следующим образом. В разделе 4.1 рассматривается задача принятия решений — формирование аттракторной структуры и популяционной специализации на примере спайковых и ReLU-сетей. Раздел 4.2 посвящён интеграции непрерывных переменных и самоорганизации так называемых кольцевых аттракторов. В разделе 4.3 анализируется многозадачность — способность одной сети переключаться между несколькими различными режимами работы — как механизм формирования кластерной организации. Наконец, раз-

дел 4.4 систематически сопоставляет влияние обучения с учителем и обучения с подкреплением на структуру фазового пространства в одной и той же задаче контекстно-зависимого принятия решений, выявляя различия, которые не видны при сравнении одних лишь поведенческих показателей.

4.1. Задача бинарного выбора в обучаемых рекуррентных сетях

Принятие решений — выбор одного варианта действия из нескольких возможных на основе поступающей информации — представляет собой одну из базовых функций, реализуемой в нервной системе различных организмов. На языке динамики эта функция формулируется как *конкуренция устойчивых состояний*: альтернативы решения соответствуют различным аттракторам (или областям притяжения) в фазовом пространстве сети, а входной сигнал определяет, к какому из аттракторов притянется траектория [29, 214]. Такая формулировка не является метафорой — она отражает реальную структуру фазового пространства обученных сетей.

В настоящем разделе рассматриваются две взаимодополняющие постановки. Первая — спайковые сети в задаче двухальтернативного выбора, обученные с учителем, где решение формируется как множество устойчивых состояний с механизмом «победитель получает всё». Вторая — сети с функцией активации ReLU (линейный выпрямитель). Обе постановки демонстрируют общий принцип: обучение деформирует фазовое пространство, создавая аттракторную структуру, необходимую для реализации функции выбора.

4.1.1. Введение и постановка задачи

В задаче двухальтернативного вынужденного выбора (two-alternative forced choice, 2AFC) субъект на основе предложенного стимула должен определить,

каким из двух возможных свойств этот стимул обладает. Прототипом для моделирования служит классический нейрофизиологический эксперимент, схема которого представлена на рис. 4.1. Подготовленной обезьяне на экране демонстрируется точка фиксации (зрительный маркер, сигнализирующий о начале испытания и требующий удержания взгляда), затем появляется зрительный стимул — облако точек, часть из которых движется случайным образом, а другая часть — когерентно в выделенном направлении. После этого и точка фиксации, и облако точек исчезают, а по краям экрана возникают две целевые точки, соответствующие двум возможным направлениям преимущественного движения. Обезьяна саккадным движением глаз направляет взгляд на одну из них, сообщая тем самым своё решение.

Другой пример задачи двухальтернативного выбора — сравнение двух вибротактильных стимулов с задержкой. Подготовленной обезьяне на одну из конечностей последовательно предъявляются два импульса, частоты которых варьируются и отличаются друг от друга. В конце эпизода испытуемое животное нажатием одной из двух кнопок сообщает о том, какой из двух стимулов — первый или второй — был интенсивнее.

К настоящему времени установлены корреляции между активностью нейронов префронтальной и задней теменной коры и параметрами выполняемой задачи. В частности, обнаружено, что спайковая активность нейронов может нарастать в процессе предъявления стимула вплоть до момента принятия решения, причём скорость нарастания пропорциональна доле когерентно движущихся точек. Популяционный отклик нейронов формирует накопление свидетельств в пользу одной из двух альтернатив. Существуют две основные гипотезы: принятие решения выражается либо в виде плавного нарастания активности, либо в форме скачка между низкоактивным и высокоактивным состояниями.

В настоящей работе используется нисходящий подход: априори не налагается ограничений на архитектуру связей, а сеть настраивается на целевую функцию методами машинного обучения. Возникающая после обучения структура связей и режимы динамики анализируются средствами нелинейной динамики.

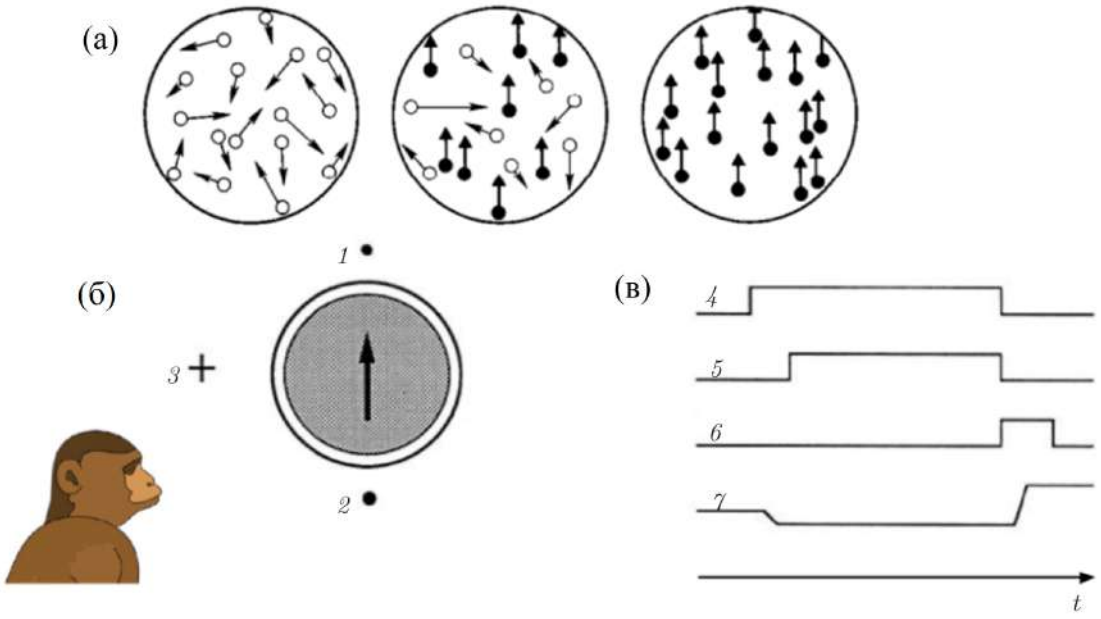

Рис. 4.1 – Задача двухальтернативного вынужденного выбора и её экспериментальная реализация. (а) Примеры зрительного стимула с разным соотношением количества случайно и когерентно движущихся точек. (б) Схема эксперимента: 1 и 2 — целевые точки, 3 — точка фиксации. (в) Временна́я последовательность этапов испытания: 4 — точка фиксации, 5 — стимул, 6 — целевые точки, 7 — позиция глаз.

4.1.2. Модель рекуррентной сети для задачи сравнения стимулов

Для моделирования задачи сравнения двух последовательных стимулов с задержкой рассматривается рекуррентная нейронная сеть (нелинейная сеть активных элементов с обратной связью), состоящая из $N = 256$ элементов с кусочно-линейной функцией активации:

$$\tau \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -\mathbf{r}(t) + \mathrm{ReLU}\big(\mathbf{W}\mathbf{r}(t) + \mathbf{U}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_r\big), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{r} = [r_j] \in \mathbb{R}^N$ — вектор активностей элементов, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — матрица рекуррентных весов (коэффициентов связи), $\mathrm{ReLU}(x) = \max(0, x)$ — кусочно-линейная функция активации, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N\times 2}$ — матрица входных весов, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\top$ — входной вектор. Выход формируется линейным считыванием (выходным сумматором):

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{V}\mathbf{r}(t) + \mathbf{b}_z, \qquad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3\times N}. \tag{4.2}$$

Схема модели представлена на рис. 4.2. В процессе испытания через первый вход x_1 последовательно подаются два стимула f_1 и f_2 из набора $\{10, 14, 18, 22, 26, 30, 34\}$, разделённые задержкой длительностью 3 с; через второй вход x_2 поступает сигнал фиксации, определяющий фазы испытания. Цель обучения: по окончании второго стимула на выходе должно выполняться $z_1 > z_2$ при $f_1 > f_2$ и $z_2 > z_1$ при $f_2 > f_1$.

Выбор функции ReLU мотивирован тем, что она хорошо аппроксимирует зависимость средней частоты спайков от входного тока для кортикальных нейронов в физиологически релевантном диапазоне — кусочно-линейную характеристику без насыщения [215, 216].

Обучение проводилось методом стохастического градиентного спуска с модификацией «Адам» (адаптивная оценка моментов) [217], настраивались все параметры: $\mathbf{W}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{b}_r$, $\mathbf{b}_z$. Уравнения (4.1) дискретизировались с шагом $\Delta t = 0{,}1$ с. Обучение продолжалось до снижения ошибки ниже 0,5%, после чего сеть давала правильный ответ в 95% испытаний.

4.1.3. Смешанная селективность активных элементов

На уровне отдельных элементов обученной сети можно наблюдать определённые сходства с биологическими нейронами. На рис. 4.3 приведены графи-

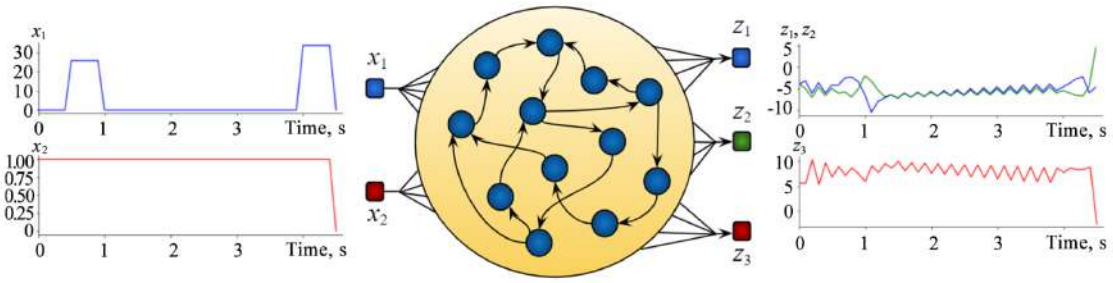

Рис. 4.2 – Схема модели для задачи сравнения стимулов с задержкой. В центре: рекуррентная нейронная сеть из N элементов с двумя входами x_1, x_2 и тремя выходами z_1, z_2, z_3. Слева: входные сигналы в течение одного испытания — два стимула f_1 и f_2, разделённые задержкой, и сигнал фиксации. Справа: выходные отклики обученной сети.

ки активности $r_i(t)$ четырёх модельных элементов, усреднённой по реализациям. Различными цветами показаны отклики при различных значениях первого стимула f_1.

Отдельные элементы по-разному реагируют на этапы задачи. Элемент на рис. 4.3а при первом стимуле подавляется, затем активируется пропорционально f_1; во время задержки монотонная зависимость сохраняется, а второй стимул подавляет активность. Элемент на рис. 4.3б при первом стимуле снижает активность тем сильнее, чем больше f_1; по окончании стимула зависимость от f_1 меняется на противоположную. Элемент на рис. 4.3в активируется только при стимуляции с прямой зависимостью от f_1. Элемент на рис. 4.3г ведёт себя аналогично при стимуляции, однако во время задержки демонстрирует обратную зависимость.

Таким образом, элементы сети демонстрируют *смешанную селективность* — зависимость отклика одного элемента одновременно от нескольких параметров задачи (величины стимула, фазы испытания, принятого решения). Смешанная селективность характерна для нейронов префронтальной коры приматов [103] и возникает в модели самопроизвольно, несмотря на простоту функции активации и отсутствие архитектурных ограничений.

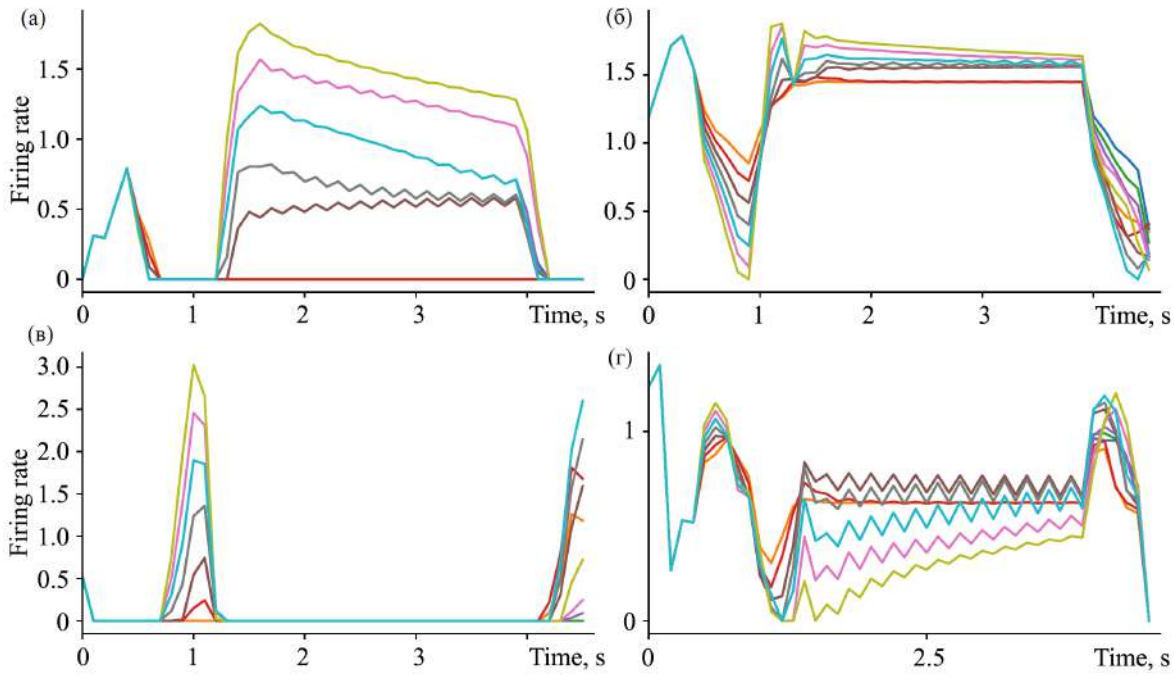

Рис. 4.3 – Активность четырёх элементов обученной сети (4.1), усреднённая по реализациям. Цвет — значение первого стимула f_1. (а–г) Примеры элементов с различными профилями смешанной селективности к стимулу, задержке и решению.

4.1.4. Разъединённые главные компоненты

Для выяснения того, как параметры задачи кодируются в популяционной активности, применён метод разъединённых главных компонент (demixed PCA, dPCA) [213]. В отличие от стандартного метода главных компонент (PCA), находящего подпространства с максимальной дисперсией без учёта внешних переменных, метод dPCA разлагает матрицу данных $\mathbf{X}$ на компоненты, каждая из которых зависит от одного параметра задачи:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_t + \mathbf{X}_s + \mathbf{X}_d + \ldots + \mathbf{X}_{\text{noise}}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{X}_t$ — компонента, зависящая только от времени; $\mathbf{X}_s$ — от стимула; $\mathbf{X}_d$ — от решения.

Результаты (рис. 4.4) показывают, что многомерная активность сети (4.1)

допускает эффективное разложение на низкоразмерные подпространства, каждое из которых отражает отдельный аспект задачи. Стимул-зависимая компонента разделяет траектории по величине f_1 после первого стимула; компонента решения разделяет их по знаку $f_1 - f_2$ после принятия решения. Этот результат нетривиален: априори нет оснований ожидать, что многомерная активность допускает столь компактное факторизованное представление [218].

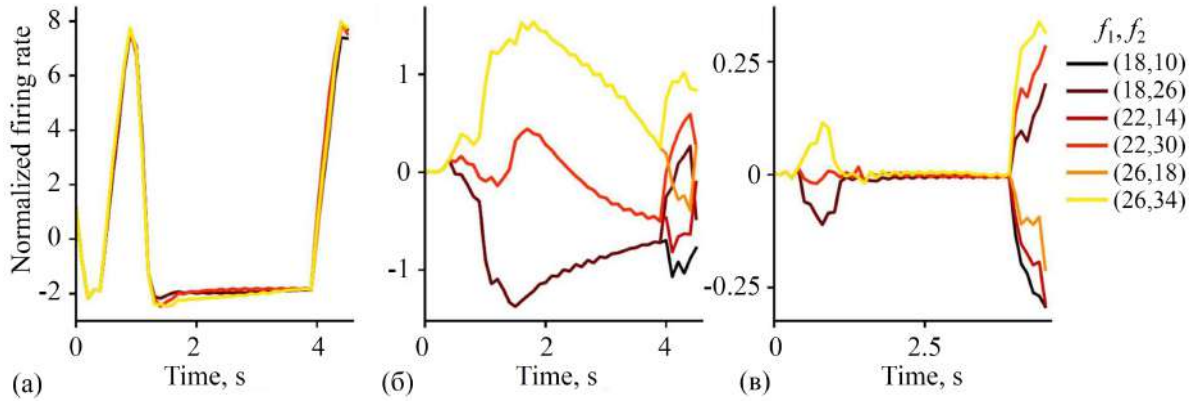

Рис. 4.4 – Разъединённые главные компоненты активности обученной сети (4.1) при различных парах (f_1, f_2). (а) Временна́я компонента (не зависит от стимулов). (б) Стимул-зависимая компонента (траектории разделяются по f_1). (в) Компонента решения (разделение по знаку $f_1 - f_2$).

4.1.5. Структура фазового пространства в спайковых сетях

Дискретизированная динамика мембранных потенциалов имеет вид

$$\mathbf{v}(n+1) = \alpha\,\mathbf{v}(n) + (1-\alpha)\big[\mathbf{W}_{\text{rec}}\,\mathbf{z}(n) + \mathbf{W}_{\text{in}}\,\mathbf{x}(n+1)\big], \tag{4.4}$$

где $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ — вектор мембранных потенциалов, $\alpha = \exp(-\delta t/\tau_{\text{m}})$ — коэффициент затухания ($\tau_{\text{m}} = 25$ мс), $\mathbf{W}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — матрица рекуррентных весов, $\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N\times 3}$ — матрица входных весов. При достижении мембранным потенциалом порога $v_{\text{th}} = 0{,}65$ мВ генерируется спайк ($z_j(n) = 1$), после чего потенциал сбрасывается до $v_{\text{reset}} = 0$. Выходной сигнал формируется фильтрованным

считыванием спайковой активности:

$$\mathbf{y}(n+1) = \kappa\,\mathbf{y}(n) + \mathbf{W}_{\text{out}}\,\mathbf{z}(n+1) + \mathbf{b}_{\text{out}}, \tag{4.5}$$

где $\kappa = \exp(-\delta t/\tau_{\text{out}})$, $\tau_{\text{out}} = 5$ мс.

Задача — двухальтернативный выбор: через два входа одновременно подаются зашумлённые сигналы $x_1(t) \sim \mathcal{N}(\bar{x}_1, \sigma)$ и $x_2(t) \sim \mathcal{N}(\bar{x}_2, \sigma)$; сеть должна определить, какой из сигналов в среднем выше. Третий вход — сигнал фиксации, определяющий момент генерации ответа.

Обучение проводилось методом e-prop [219] — вариантом обратного распространения ошибки во времени (BPTT), адаптированным для спайковых сетей через суррогатные градиенты (псевдопроизводные порогового механизма). Настраивались рекуррентные веса $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ и выходные веса $\mathbf{W}_{\text{out}}$; входные веса фиксировались.

Анализ обученной спайковой сети методом главных компонент на плоскости средних частот генерации спайков выявил характерную структуру фазового пространства (рис. 4.5). Траектории при различных значениях $\Delta x = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ расходятся от стационарного состояния спонтанной активности S и сходятся к устойчивым состояниям $O_{\Delta x}$, совокупность которых образует *линию* L_0 в пространстве главных компонент. Точка O_0 (соответствующая $\Delta x = 0$) разделяет L_0 на две области: состояния при $\Delta x > 0$ лежат по одну сторону, при $\Delta x < 0$ — по другую. Чем больше $|\Delta x|$, тем дальше от O_0 расположен соответствующий аттрактор.

Эта структура — *непрерывное семейство устойчивых состояний*, параметризованное входом, — качественно отличается клссических моделей, где задача решается двумя изолированными аттракторами. Линия L_0 кодирует не

только знак решения, но и степень уверенности (расстояние от O_0), реализуя аналоговое представление накопленных свидетельств.

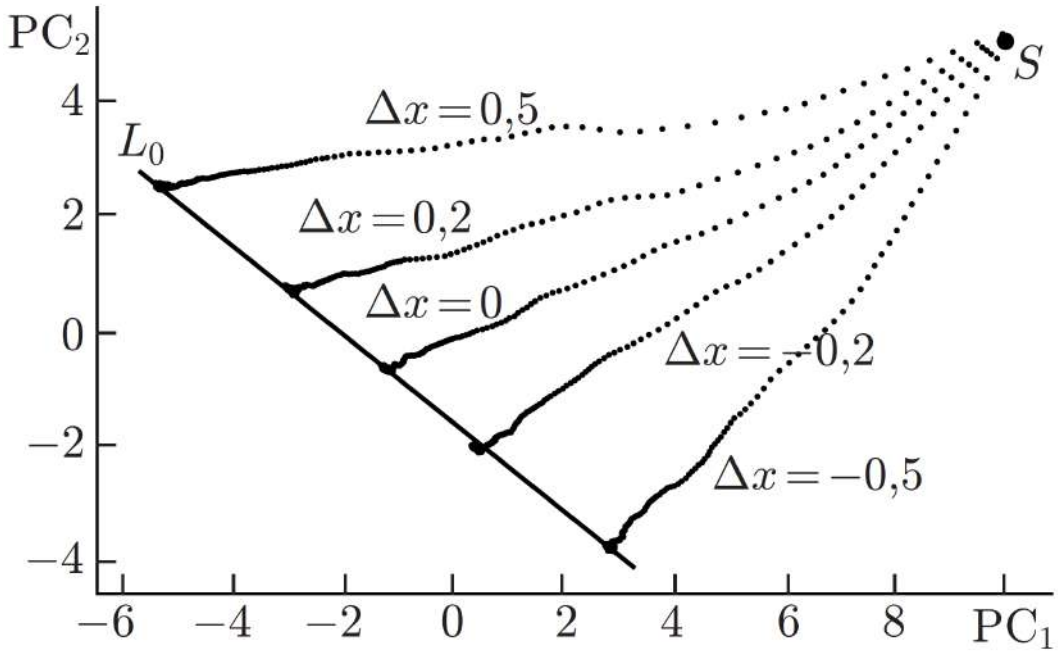

Рис. 4.5 – Аттракторный ландшафт обученной спайковой сети (4.4) на плоскости двух главных компонент средних частот генерации спайков. Каждая траектория соответствует фиксированному $\Delta x = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$. S — стационарное состояние спонтанной активности; L_0 — линия устойчивых неподвижных точек $O_{\Delta x}$; точка O_0 разделяет области, соответствующие двум альтернативам.

4.1.6. Популяционная специализация и механизм выбора

Существенным следствием обучения является возникновение *функциональной специализации* элементов сети (рис. 4.6). Вклад i-го элемента в выходной сигнал y_1 характеризуется произведением его средней частоты спайков f_i на выходной вес $w^{(1)}_{\text{out},i}$.

Анализ выявил три группы. Группа A_1 (~ 50 элементов) вносит максимальный положительный вклад в y_1 и преимущественно активна при выборе первой альтернативы. Группа A_2 (~ 50 элементов) подавляет y_1 и активна при выборе второй альтернативы. Группа A_0 — наибольшая, не вносящая значимого прямого вклада в выходы, но участвующая во внутренней динамике. Выходные

веса устроены так, что элементы A_1 возбуждают y_1 и подавляют y_2, а элементы A_2 — наоборот. Внутри рекуррентной сети группы A_1 и A_2 связаны взаимно подавляющими связями, а от группы A_0 к обеим группам идут преимущественно положительные связи.

Эта модульная структура не задавалась заранее, а возникла в процессе обучения. При уменьшении размера сети формируется сходная структура с приблизительно тем же соотношением числа элементов в группах.

Каузальные связи проверялись методом, аналогичным электростимуляции: при искусственном возбуждении элементов группы A_1 в отсутствие входных сигналов на выходах устанавливалось соотношение $y_1 > y_2$, причём разность выходов возрастала с числом стимулируемых элементов.

Выявленная организация реализует механизм «победитель получает всё», обеспечивающий три функциональных свойства. *Нелинейное разделение* — за счёт взаимного подавления конкурирующих групп A_1 и A_2 даже малое различие входных сигналов приводит к существенному различию выходов. *Бистабильность* — после снятия входного сигнала система сохраняет принятое решение, поскольку активная группа поддерживает своё состояние через положительную обратную связь и подавляет конкурирующую группу. *Робастность* — решение устойчиво к шуму и малым вариациям параметров, так как рекуррентные связи удерживают систему вблизи выбранного аттрактора.

4.1.7. Выводы

Результаты раздела показывают, что принятие решений в полностью обучаемых рекуррентных сетях реализуется с помощью динамического механизма — формирования конкурирующих аттракторов и направленных каналов переходов к ним — независимо от модели элемента. Ключевым следствием обу-

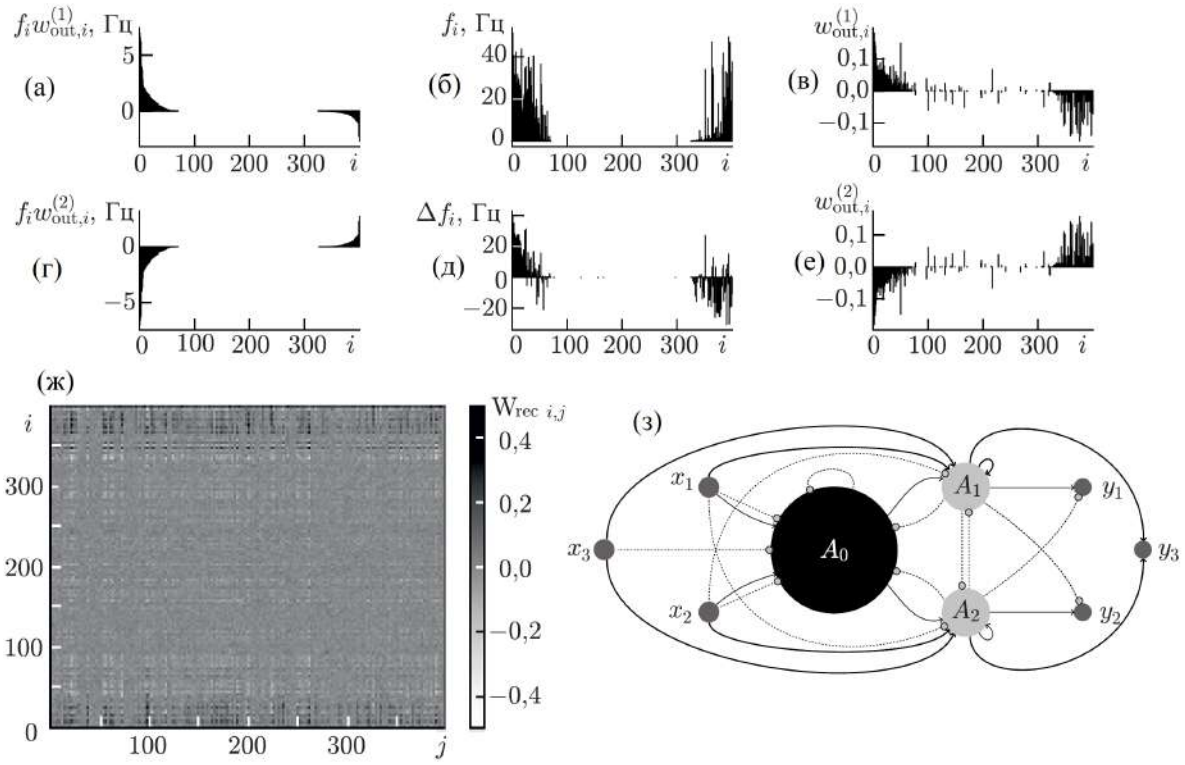

Рис. 4.6 – Функциональная специализация популяций в обученной спайковой сети. (а, г) Распределение вкладов $f_i w^{(k)}_{\text{out},i}$ в выходы y_1, y_2 при $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$. (б) Распределение средних частот. (в, е) Выходные веса. (д) Разность частот для двух соотношений входов. (ж) Матрица рекуррентных весов, упорядоченная по группам. (з) Схема групп и их связей.

чения является эмерджентная модульная организация: спонтанное разделение элементов на функциональные группы с архитектурой взаимного подавления, не заложенной в начальных условиях. Возникает вопрос: ограничивается ли управляемая деформация фазового пространства формированием дискретных устойчивых состояний, или обучение способно создавать непрерывные аттракторные многообразия заданной топологии? Ответ на этот вопрос даёт следующий раздел, где рассматривается задача интеграции непрерывных переменных, требующая формирования так называемого кольцевого аттрактора.

4.2. Задача интегрирования входного сигнала в обучаемых рекуррентных сетях

Предыдущий раздел был посвящён задачам бинарного выбора, где динамическим носителем функции служит бистабильный аттракторный ландшафт — конечный набор неподвижных точек или инвариантных кривых. Однако многие задачи обработки сигналов и управления требуют представления и удержания *непрерывных* величин: угла поворота, фазы периодического процесса, пространственной координаты. Естественным динамическим носителем такой функции является *непрерывное аттракторное многообразие* — структура в фазовом пространстве, вдоль которой система может устойчиво удерживать любое из континуума состояний, обладая нейтральной устойчивостью в тангенциальном направлении и притяжением в трансверсальных [220, 221].

Каноническим примером непрерывного аттракторного многообразия служит так называемый*кольцевой аттрактор* (ring attractor) — одномерное замкнутое инвариантное многообразие, топологически эквивалентное окружности S^1. На языке радиофизики кольцевой аттрактор представляет собой аналог *фазовращателя с памятью* — устройства, способного устанавливать и сохра-

нять произвольное значение фазы сигнала: подобно тому как фазовращатель фиксирует заданный фазовый сдвиг после снятия управляющего воздействия, кольцевой аттрактор удерживает произвольное состояние на замкнутом многообразии без внешней поддержки. Кольцевые аттракторы теоретически предложены в работах [222, 223] как модель клеток направления головы; экспериментально идентифицированы в центральном комплексе дрозофилы [32] и предположительно — в энторинальной коре грызунов [180, 224, 225]. Теоретически показано, что двумерные пространственные представления — например, координатные карты на плоскости — могут быть построены комбинированием нескольких одномерных кольцевых аттракторов, каждый из которых кодирует положение вдоль отдельной пространственной оси [226]. Это подчёркивает роль кольцевого аттрактора как фундаментального вычислительного элемента, из которого могут собираться представления более высокой размерности.

Традиционно модели кольцевых аттракторов строятся «вручную» — с заранее заданной кольцевой симметрией связей (косинусоидальный профиль весов — так называемая «мексиканская шляпа»). Центральный вопрос настоящего раздела: *может ли кольцевой аттрактор самоорганизоваться в процессе обучения из изначально неструктурированной рекуррентной сети?* Положительный ответ имеет принципиальное значение: он показывает, что функциональная архитектура (аттракторное многообразие заданной топологии) возникает не из заранее заложенных решений исследователя, а из динамических требований задачи — ещё одно проявление обучения как управляемой деформации фазового пространства.

4.2.1. Введение и постановка задачи

Рассматривается задача непрерывной навигации на кольце — интегрирование сигнала скорости для оценки текущего углового положения. Агент на каждом временно́м шаге t получает скалярный сигнал скорости $v_t \in [-1, 1]$ и должен вычислить угловую координату

$$x_t = \left(\int_0^t v_\tau \, d\tau \right) \bmod 2\pi. \tag{4.6}$$

Входной сигнал v_t генерируется синтетически из комбинации сглаженных случайных блужданий и детерминированных режимов (линейные нарастания, интервалы постоянной скорости):

$$v_{t+1} = v_t + \tilde{v}_t + u_t, \tag{4.7}$$

$$\tilde{v}_{t+1} = 0{,}8\,\tilde{v}_t + \frac{\alpha}{m}\,\eta_t + \beta\,\tilde{v}_t, \tag{4.8}$$

где $\eta_t \sim U(-1, 1)$, $\alpha \sim U(0, 2)$, $m \sim U(10, 625)$, $\beta \sim U(0{,}05;\ 0{,}45)$; значения v_t ограничиваются интервалом $[-1, 1]$. Такая смесь входов порождает разнообразные траектории, что способствует формированию у сети обобщённой функции непрерывного интегрирования.

Скалярная скорость v_t преобразуется в распределённый паттерн активности $\mathbf{I}_t \in \mathbb{R}^n$ посредством *популяционного кодирования* (распределённого представления скалярной переменной набором элементов с гауссовыми настроечными кривыми, центрированными на различных «предпочитаемых» значениях):

$$P\colon v_t \to \mathbf{I}_t \in \mathbb{R}^n. \tag{4.9}$$

Каждый входной элемент имеет гауссову настроечную кривую, центрированную на определённом значении скорости (рис. 4.7). По мере изменения v_t пик активности («бугор») плавно перемещается по входной группе элементов. Существенно, что входная группа кодирует *только скорость*, а не угловое положение, что позволяет исследовать, как сеть самостоятельно формирует угловое представление через рекуррентную динамику.

Аналогично организован выход: целевая координата x_t кодируется группой элементов с настроечными кривыми, равномерно покрывающими $[0, 2\pi)$. Популяционное кодирование на выходе устраняет разрыв на границе 2π, обеспечивая непрерывность представления циклической переменной. В дискретной симуляции интеграл (4.6) аппроксимируется методом Эйлера второго порядка; во время обучения целевая координата x_t служит сигналом учителя.

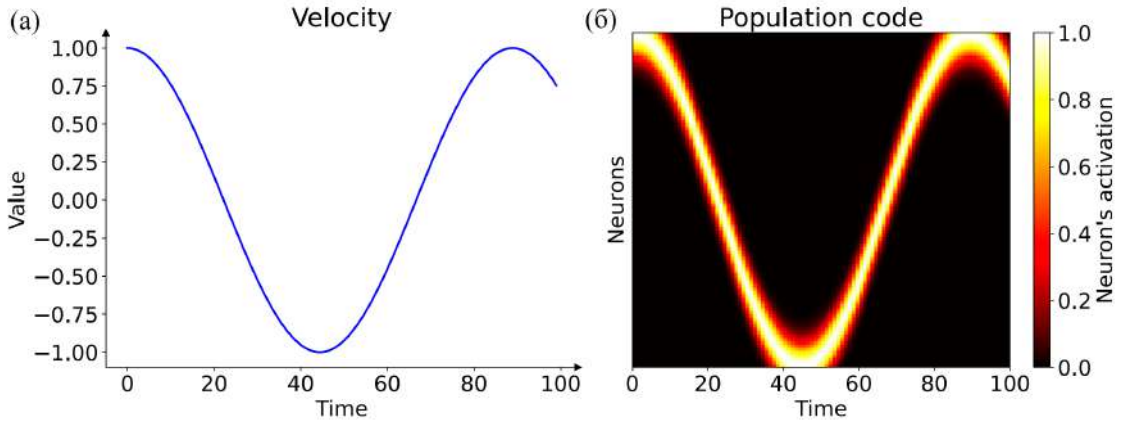

Рис. 4.7 – Популяционное кодирование входа скорости. (а) Пример изменяющегося во времени сигнала скорости (один период синусоиды). (б) Пространственно-временна́я диаграмма активности входной группы элементов: каждая строка соответствует элементу с определённым предпочитаемым значением скорости; пик активности («бугор») смещается по группе вслед за изменением входного сигнала.

4.2.2. Архитектура сети и метод обучения

Рекуррентная сеть из $N = 800$ элементов с функцией активации ReLU разделена на две равные группы (далее — популяции, т. е. функционально выде-

ленные подмножества элементов сети): *выходную* (элементы 1–400, не получают прямого внешнего входа) и *входную* (элементы 401–800, получают популяционно-кодированный сигнал $\mathbf{I}_t$). Обе популяции равномерно покрывают свои области: входная — интервал скоростей $[-1, 1]$, выходная — интервал координат $[0, 2\pi)$.

Полное состояние сети записывается как объединение (конкатенация — последовательное соединение в один вектор) активностей двух популяций:

$$\mathbf{h}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_t^o \\ \mathbf{h}_t^i \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

а матрица рекуррентных весов $\mathbf{W}_{hh}$ декомпозируется на четыре блока:

$$\mathbf{W}_{hh} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{oo} & \mathbf{W}_{oi} \\ \mathbf{W}_{io} & \mathbf{W}_{ii} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

где $\mathbf{W}_{oo}$, $\mathbf{W}_{ii}$ — внутрипопуляционные блоки, $\mathbf{W}_{oi}$, $\mathbf{W}_{io}$ — межпопуляционные (прямой и обратный пути). Динамика каждой популяции:

$$\mathbf{h}_{t+1}^i = \mathrm{ReLU}\big(\mathbf{W}_{ii}\,\mathbf{h}_t^i + \mathbf{W}_{io}\,\mathbf{h}_t^o\big) + \mathbf{I}_t, \tag{4.12}$$

$$\mathbf{h}_{t+1}^o = \mathrm{ReLU}\big(\mathbf{W}_{oo}\,\mathbf{h}_t^o + \mathbf{W}_{oi}\,\mathbf{h}_t^i\big). \tag{4.13}$$

Все четыре блока матрицы $\mathbf{W}_{hh}$ обучаются без каких-либо ограничений на структуру связей. Обучение проводилось методом «Адам» [217] с ортогональной инициализацией весов, обрезкой градиентов и протоколом curriculum learning (постепенное увеличение длительности испытания). Функция потерь учитывает популяционную структуру выхода: ближайший к целевой координате выходной элемент рассматривается как «правильный класс», соседние элементы получают меньшие весовые коэффициенты, убывающие пропорционально

кольцевому расстоянию до цели.

Разделение на две популяции (а не единая неструктурированная сеть) мотивировано задачей анализа: такой выбор позволяет количественно исследовать функциональную роль каждого блока $\mathbf{W}_{oo}$, $\mathbf{W}_{oi}$, $\mathbf{W}_{io}$, $\mathbf{W}_{ii}$ после обучения, когда внутренняя структура формируется спонтанно.

4.2.3. Самоорганизация кольцевой структуры

Обученная сеть демонстрирует отчётливую функциональную специализацию (рис. 4.8). Активность входной популяции непосредственно отражает поступающий сигнал скорости (рис. 4.8а); выходная популяция интегрирует его, формируя стабильный локализованный «бугор» активности, положение которого на кольце соответствует текущей угловой координате агента (рис. 4.8б).

На основе анализа обученной матрицы связей установлен механизм этой специализации (рис. 4.8в). Блок $\mathbf{W}_{oo}$ (связи внутри выходной популяции) формирует *кольцеобразную аттракторную структуру*: сильные положительные веса вдоль главной диагонали с периодическими граничными условиями и более слабые отрицательные — вдали от диагонали. Такой профиль — близкий к «мексиканской шляпе» на окружности — является характерной чертой классических моделей кольцевых аттракторов, однако здесь он возник не из априорных предположений, а исключительно из цели обучения. Блок $\mathbf{W}_{ii}$ (связи внутри входной субпопуляции) демонстрирует более локализованную, сегментоподобную структуру, не поддерживающую долговременной активности.

Обнаружена спонтанная функциональная специализация популяций — *самоорганизованное разделение функций*: выходная популяция образует кольцевой аттрактор — модуль памяти, поддерживающий длительное (сохраняющееся без внешнего воздействия) представление интегрированной координаты; вход-

ная популяция формирует блок управления с затухающей динамикой (диссипативный блок — подсистему, в которой активность быстро рассеивается при отсутствии входного сигнала), преобразующий сигнал скорости в направленные команды, приводящие в движение «бугор» на кольце. Это модульное разделение функций памяти и управления — организационный принцип, широко обсуждаемый в контексте систем пространственной навигации [225, 227], — возникает здесь спонтанно как следствие обучения.

4.2.4. Функциональная специализация

Для количественного подтверждения функциональных ролей двух популяций исследована их автономная динамика при отключённых межпопуляционных связях. Каждая популяция инициализировалась несколькими гауссовыми «буграми» активности и эволюционировала только под действием собственных рекуррентных связей:

$$\tilde{\mathbf{h}}^{i}_{t+1} = \mathrm{ReLU}\big(\mathbf{W}_{ii}\,\tilde{\mathbf{h}}^{i}_{t}\big), \tag{4.14}$$

$$\tilde{\mathbf{h}}^{o}_{t+1} = \mathrm{ReLU}\big(\mathbf{W}_{oo}\,\tilde{\mathbf{h}}^{o}_{t}\big). \tag{4.15}$$

Результаты подтверждают функциональное разделение. Выходная популяция демонстрирует *длительное переходное удержание активности*: начальные «бугры» сохраняются на протяжении сотен временны́х шагов, медленно затухая к нулевому состоянию. Такое поведение характерно для метастабильного состояния, которое не является стационарным (система медленно эволюционирует), но на временны́х масштабах, релевантных для решаемой задачи, функционально неотличимо от аттрактора и робастно по отношению к шуму. Во входной популяции, напротив, наблюдается быстрое диссипативное затухание лю-

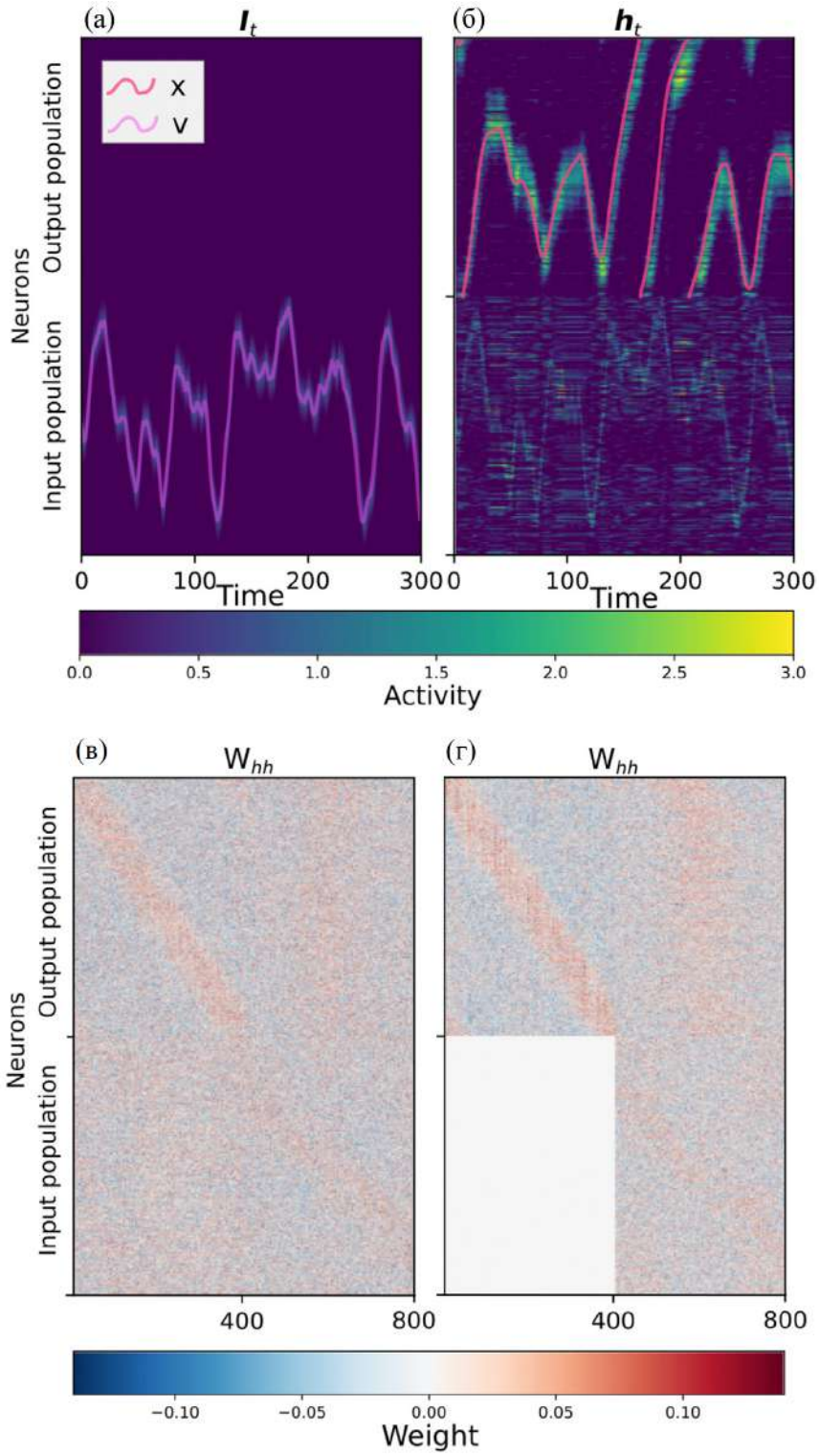

Рис. 4.8 – Самоорганизованная структура обученной сети. Входная субпопуляция: элементы 1–400; выходная: 401–800. (а) Активность популяционно-кодированного входа $\mathbf{I}_t$; фиолетовая кривая — скалярный профиль скорости. (б) Активность $\mathbf{h}_t$ обученной сети; красная кривая — декодированная выходная координата. Выходная субпопуляция поддерживает длительно сохраняющийся «бугор», интегрирующий вход; входная — динамически отражает сигнал скорости. (в) Обученная матрица $\mathbf{W}_{hh}$: блок $\mathbf{W}_{oo}$ (вверху слева) сформировал кольцевой аттрактор с характерным диагонально-периодическим профилем. (г) Матрица $\mathbf{W}_{hh}$ сети, обученной с обнулённым блоком обратной связи $\mathbf{W}_{io} = 0$.

бой начальной активности.

Целенаправленное отключение обратного пути $\mathbf{W}_{io}$ (от выходной к входной популяции) показало, что чисто однонаправленная архитектура способна выполнять интегрирование, однако с существенно меньшей устойчивостью: «бугор» активности на выходном кольце демонстрирует значительный дрейф. Сравнение автономной динамики (4.15) для полной и однонаправленной сетей (рис. 4.8в, г) показало, что устойчивость выходного модуля в полной сети существенно выше. Это указывает на то, что в полной архитектуре обратный путь $\mathbf{W}_{io}$ позволяет входной популяции участвовать в замкнутом рекуррентном контуре, охватывающем обе популяции (выход $\rightarrow$ вход $\rightarrow$ выход), который активно стабилизирует «бугор» на выходном кольце.

На основе анализа прямого управляющего сигнала $\mathbf{W}_{oi}\,\mathbf{h}_t^i$ (от входной популяции к выходной) установлен механизм преобразования скорости в движение «бугра» (рис. 4.9г–ж). В «сыром» виде управляющий сигнал кажется неструктурированным, однако сортировка выходных элементов по их пиковой скорости отклика обнаруживает высокоорганизованную диагональную структуру — топографически упорядоченное направленное воздействие, систематически смещающее «бугор» активности вдоль кольцевого многообразия. Примечательно, что эта структура практически идентична в полной сети и в сети без обратной связи ($\mathbf{W}_{io} = 0$), что подтверждает: *механизм управления* реализуется прямым путём $\mathbf{W}_{oi}$, тогда как обратный путь $\mathbf{W}_{io}$ отвечает за *динамическую стабилизацию*.

4.2.5. Роль пространственного согласования между управлением и аттрактором

Существенным результатом настоящей работы является демонстрация того, что работоспособность системы зависит не только от обученных весов, но и от *пространственного согласования* — соответствия между пространственной организацией управляющих сигналов и упорядоченным расположением элементов на кольцевом аттракторе.

Механизм интегрирования протестирован подачей входа скорости, линейно нарастающего от -1 до $+1$ (рис. 4.9а). Правильно обученная сеть успешно интегрирует этот сигнал: «бугор» плавно перемещается по выходной популяции (рис. 4.9б). Однако *случайная перестановка* порядка элементов внутри выходной популяции — единственное изменение, не затрагивающее значения весов — полностью разрушает интегрирование, приводя к хаотической активности (рис. 4.9в).

Этот результат демонстрирует, что функция сети не является простой суммой вкладов отдельных элементов, а фундаментально зависит от *обученного упорядоченного отображения* между управляющими сигналами входной популяции и пространственным расположением элементов выходного кольцевого аттрактора. На радиофизическом языке это можно сформулировать как принцип *согласования*: для эффективной работы распределённого кода структура связей должна быть согласована с пространственной организацией представляемых переменных. Нарушение этого согласования приводит к катастрофическому отказу функции, даже если все элементы и связи по отдельности остаются неизменёнными.

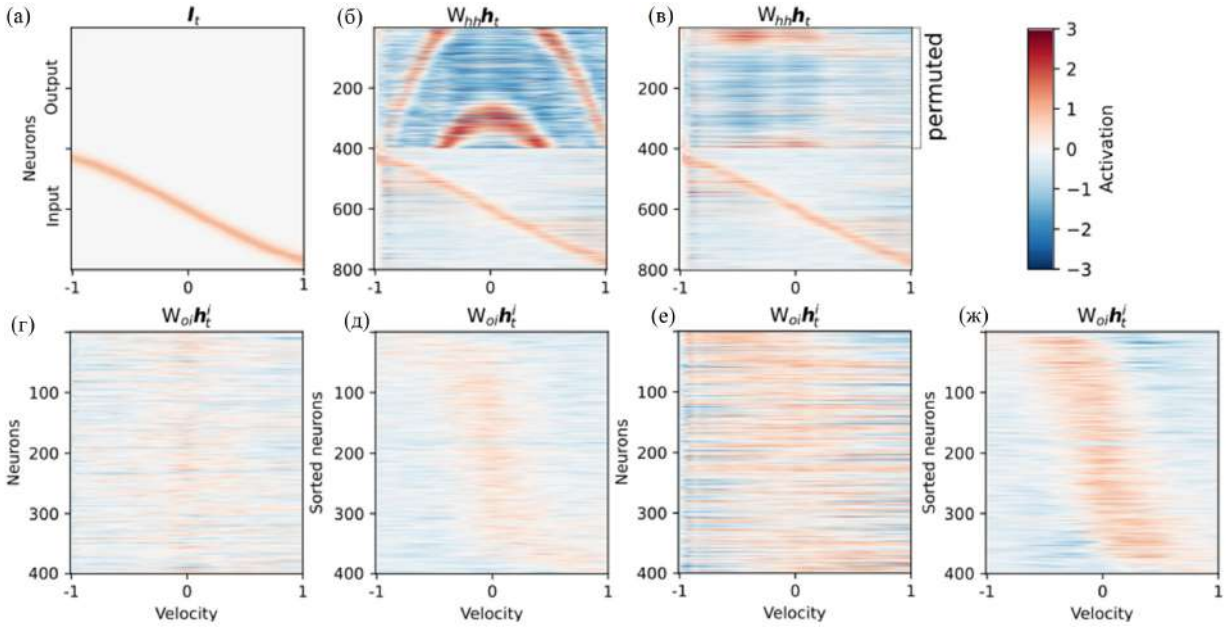

Рис. 4.9 – Роль пространственного согласования между управлением и аттрактором. (а) Вход скорости: линейное нарастание от -1 до $+1$. (б) Активность обученной сети: «бугор» плавно перемещается по выходной субпопуляции (элементы 1–400). (в) Случайная перестановка порядка выходных элементов полностью уничтожает интегрирование. (г–ж) Прямой управляющий сигнал $\mathbf{W}_{oi}\,\mathbf{h}_t^i$ как функция входной скорости: (г) «сырой» сигнал (полная сеть) кажется неструктурированным; (д) при сортировке выходных элементов по пиковой скорости отклика обнаруживается высокоорганизованная диагональная структура; (е, ж) тот же анализ для сети без обратной связи ($\mathbf{W}_{io} = 0$) показывает практически идентичную структуру управления.

4.2.6. Выводы

Раздел демонстрирует, что обучение способно формировать не только дискретные наборы аттракторов (как в задаче принятия решений), но и непрерывные аттракторные многообразия заданной топологии — кольцевой аттрактор для хранения и обновления угловой переменной. Самоорганизация модульной архитектуры (блок памяти и блок управления) и критическая роль пространственного согласования между входным кодом и структурой аттрактора расширяют картину управляемой деформации фазового пространства. Однако в обоих рассмотренных случаях — дискретный выбор и непрерывная интеграция — сеть обучалась одной задаче. В биологических системах и во многих практических приложениях одна и та же сеть должна выполнять несколько различных функций, переключаясь между ними по контекстному сигналу. Как организуется фазовое пространство сети, обученной нескольким задачам одновременно, исследуется в следующем разделе.

4.3. Многозадачность в спайковых рекуррентных сетях

В предыдущих разделах было показано, как обучение формирует аттракторные структуры для решения отдельных задач: дискретные аттракторы для бинарного выбора (раздел 4.1) и непрерывное аттракторное многообразие для хранения аналоговой переменной (раздел 4.2). Однако биологические нейронные сети способны выполнять множество различных функций, переключаясь между ними в зависимости от условий. Возникает естественный вопрос: какие динамические структуры формируются при обучении, если одна и та же сеть должна реализовывать не одну, а несколько различных задач?

С точки зрения нелинейной динамики, многозадачность (способность од-

ной сети выполнять несколько различных функций в зависимости от управляющего входа) означает необходимость быстрого и надёжного переключения между различными режимами — аттракторными или переходными — при минимальной взаимной интерференции . Центральный вопрос настоящего раздела состоит в том, как эта потребность приводит к самоорганизации кластерной структуры нейронной сети и формированию переключаемых функциональных подпространств. Принципиальным отличием от предшествующих работ по многозадачным рекуррентным сетям [25] является использование спайковых нейронов с медленной переменной адаптации, что позволяет исследовать роль разделения временны́х масштабов в механизмах переключения режимов.

Подавляющее большинство существующих исследований рассматривает нейронные сети, обученные выполнять одну конкретную задачу, причём используемые модели основаны на частотном описании, где нейроны представлены как нелинейные функции активации взвешенной суммы входов. Вместе с тем важной особенностью биологических нейронных сетей является возможность выполнения множества задач, и понимание того, как одна и та же искусственная нейронная сеть реализует различные функции, может пролить свет на соответствующие механизмы в биологическом прототипе. Спайковая динамика, порождаемая взаимодействующими нейронами, — ещё одно биологическое свойство, игнорируемое большинством моделей данного типа. Более того, спайковые сети активно изучаются в последние годы в сообществах машинного обучения и нейроморфной инженерии благодаря их энергетической эффективности.

4.3.1. Введение и постановка задачи

Архитектура используемой модели представлена на рис. 4.10. Она состоит из входного слоя, центральной рекуррентной нейронной сети и выходного слоя.

Рекуррентная сеть включает N спайковых нейронов, структура связей которых задаётся весовой матрицей $\mathbf{W}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Изначально сеть имеет полносвязную топологию (каждый нейрон связан с каждым), и элементы $\mathbf{W}_{\text{rec}}$ случайно выбираются из нормального распределения:

$$W_{\text{rec},ij} \sim \sqrt{\frac{2}{N}}\,\mathcal{N}(0,1), \quad i \neq j. \tag{4.16}$$

Все диагональные элементы поддерживаются равными нулю на протяжении всего моделирования, что исключает прямое влияние нейрона на самого себя:

$$W_{\text{rec},ii} = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N. \tag{4.17}$$

Исследуемая сеть получает три класса входных сигналов. *Сигнал фиксации* $u_{\text{fix}}(t) \in \{0,1\}$ разделяет испытание на фазу стимуляции и фазу ответа. *Сенсорные входы* $\mathbf{u}_{\text{mod}} = (u_{\text{mod}_1},\, u_{\text{mod}_2})$ представляют собой зашумлённые скалярные сигналы двух «модальностей». *Контекстный вектор* $\mathbf{u}_{\text{task}} \in \{0,1\}^{N_{\text{task}}}$ кодирует текущую задачу. Здесь *контекст* — это управляющий сигнал, указывающий сети, какую именно из нескольких возможных задач следует выполнять в данном испытании. Контекстный вектор задаётся в формате «один из N» (в англоязычной литературе — one-hot): ровно одна компонента вектора равна единице, а остальные — нулю, так что каждой задаче соответствует уникальная позиция единичного элемента; $N_{\text{task}} = 12$ — общее число задач. Полный входной вектор имеет вид:

$$\mathbf{u}(t) = \left[u_{\text{fix}}(t),\; u_{\text{mod}_1}(t),\; u_{\text{mod}_2}(t),\; \mathbf{u}_{\text{task}}^{\top}\right]^{\top} \in \mathbb{R}^{N_{\text{in}}}, \tag{4.18}$$

где $N_{\text{in}} = 3 + N_{\text{task}} = 15$.

Входные стимулы $u_k(t)$ ($k = 1, \dots, N_{\text{in}}$) поступают в рекуррентную сеть через входную матрицу $\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N \times N_{\text{in}}}$. Элементы этой матрицы инициализируются аналогично $\mathbf{W}_{\text{rec}}$:

$$W_{\text{in},ik} \sim \sqrt{\frac{2}{N}}\,\mathcal{N}(0,1). \tag{4.19}$$

Выходные отклики $y_j(t)$ ($j = 1, \dots, N_{\text{out}}$) формируются из активности сети через матрицу $\mathbf{W}_{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N_{\text{out}} \times N}$ и вектор смещения $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_{\text{out}}}$, где $N_{\text{out}} = 3$ (два выхода решения и выход фиксации). Выходной сигнал вычисляется как:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}_{\text{out}}\,\mathbf{r}(t) + \mathbf{b}, \tag{4.20}$$

где $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^N$ — вектор мгновенных частот спайков нейронов, полученный низкочастотной фильтрацией спайковой активности:

$$\tau_r \frac{dr_i}{dt} = -r_i + s_i(t), \tag{4.21}$$

где $s_i(t) = \sum_k \delta(t - t_i^k)$ — спайковая последовательность i-го нейрона, t_i^k — времена спайков, τ_r — постоянная времени фильтрации. Элементы $\mathbf{W}_{\text{out}}$ и $\mathbf{b}$ инициализируются согласно равномерному распределению:

$$W_{\text{out},ji} \sim U\left(-\sqrt{\frac{1}{N}},\ \sqrt{\frac{1}{N}}\right), \quad b_j \sim U\left(-\sqrt{\frac{1}{N}},\ \sqrt{\frac{1}{N}}\right). \tag{4.22}$$

Рекуррентный слой состоит из адаптивных экспоненциальных нейронов

(AdEx), динамика которых описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \tau_m \dfrac{dv_i}{dt} = -v_i + I_i + \theta \exp\Big(\dfrac{v_i - v_a}{\theta}\Big) - a_i, \\ \tau_a \dfrac{da_i}{dt} = a_{\text{current}} \cdot v_i - a_i, \\ \tau_s \dfrac{dI_i}{dt} = -I_i + I_i^{\text{syn}}(t), \end{cases} \tag{4.23}$$

где v_i — мембранный потенциал i-го нейрона, a_i — переменная адаптации (медленная динамическая переменная, отражающая накопленную историю активности нейрона и модулирующая его возбудимость на длительных временны́х масштабах), I_i — синаптический ток, θ — параметр крутизны экспоненциальной нелинейности, v_a — пороговый потенциал. Синаптический вход определяется как:

$$I_i^{\text{syn}}(t) = \sum_{j=1}^{N} W_{\text{rec},ij}\, r_j(t) + \sum_{k=1}^{N_{\text{in}}} W_{\text{in},ik}\, u_k(t). \tag{4.24}$$

При достижении мембранным потенциалом порогового значения v_{th} происходит генерация спайка:

$$\text{если } v_i(t) \geq v_{\text{th}}, \text{ то } v_i(t^+) = v_{\text{reset}}, \quad a_i(t^+) = a_i(t) + \Delta a, \tag{4.25}$$

где v_{reset} — потенциал сброса, Δa — инкремент переменной адаптации после спайка.

Переменная адаптации a_i играет ключевую роль в задачах, требующих рабочей памяти. Её характерное время $\tau_a = 2$ с существенно превышает длительность отдельного спайка (~ 1 мс) и мембранную постоянную времени $\tau_m \sim 10$ мс. Это позволяет интегрировать информацию на масштабах сотен миллисе-

кунд. Отношение временны́х масштабов:

$$\frac{\tau_a}{\tau_m} \approx 200 \tag{4.26}$$

определяет способность сети сохранять след входного стимула в состоянии переменных адаптации на протяжении периодов задержки между стимулами.

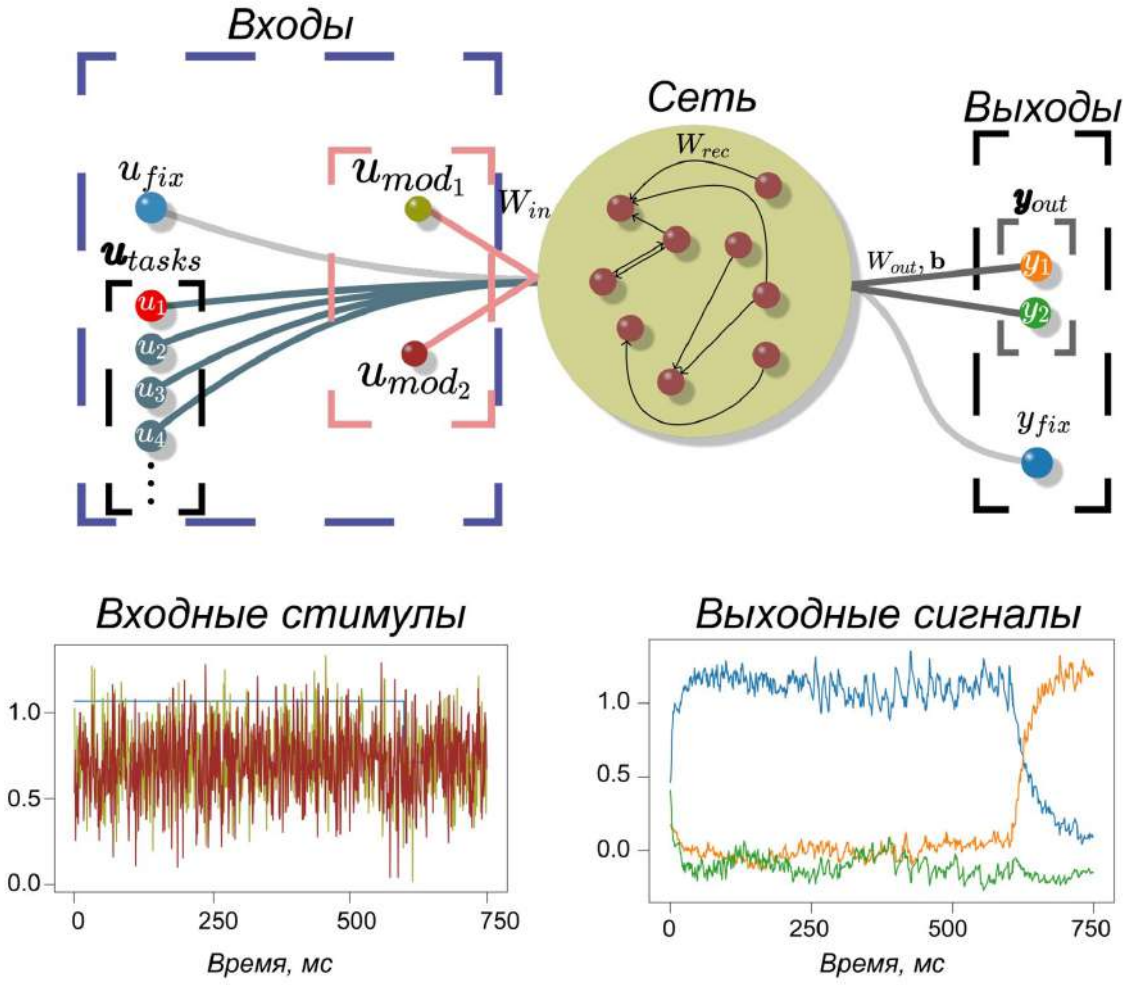

Рис. 4.10 – Архитектура спайковой нейронной сети для многозадачного обучения. Входной слой передаёт три различных класса входов — сигнал фиксации u_{fix}, сенсорные входы двух модальностей $\mathbf{u}_{\text{mod}} = (u_{\text{mod}_1}, u_{\text{mod}_2})$ и контекстный вектор $\mathbf{u}_{\text{task}}$ — через входную матрицу $\mathbf{W}_{\text{in}}$. Центральный элемент — спайковая рекуррентная нейронная сеть — характеризуется матрицей связности $\mathbf{W}_{\text{rec}}$. Её активность выводится через матрицу $\mathbf{W}_{\text{out}}$ и вектор $\mathbf{b}$ выходными элементами отклика $y_{\text{out}} = (y_1, y_2)$ и выходом фиксации y_{fix}.

Рассматривается семейство целевых задач, воспроизводящее серию классических экспериментов когнитивной нейронауки (рис. 4.11). Испытание каж-

дой задачи состоит из двух фаз — стимуляции длительностью T_{stim} и ответа длительностью T_{resp}, где сигнал фиксации равен 1 во время первой фазы и 0 во время второй:

$$u_{\text{fix}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < T_{\text{stim}}, \\ 0, & T_{\text{stim}} \le t < T_{\text{stim}} + T_{\text{resp}}. \end{cases} \tag{4.27}$$

Рассматриваются 6 типов когнитивных задач, которые реализуются через один из двух стимульных входов $(u_{\text{mod}_1}, u_{\text{mod}_2})$, что даёт в общей сложности 12 различных целевых задач. Это задача принятия решения (DM), задача принятия решения с контекстным сигналом (CtxDM), задача рабочей памяти Romo, задача go/no-go (Go), задача go/no-go с задержкой (GoDl) и задача go/no-go с временем реакции (GoRt). Таким образом, кодирующий задачу вход задаётся вектором $\mathbf{u}_{\text{task}} = \mathbf{e}_k$, где $\mathbf{e}_k$ — k-й единичный вектор, $k \in \{1, \dots, 12\}$.

Эти задачи можно разделить на два класса — *задачи выбора* (DM, CtxDM, Romo) и *задачи воспроизведения* (Go, GoRt, GoDl). Для первых сеть обучается производить бинарный выход, указывающий, какой из входных стимулов обладает целевым признаком. Для вторых сеть обучается воспроизводить входной стимул с некоторыми дополнительными требованиями.

В задаче принятия решения (DM) во время фазы стимуляции вход u_{mod_1} (или u_{mod_2}) предъявляется в форме стохастического сигнала:

$$u_{\text{mod}_1}(t) = \bar{u} + \sigma_{\text{noise}} \cdot \xi(t), \tag{4.28}$$

где $\bar{u} \in (0, 1)$ — среднее значение стимула, σ_{noise} — интенсивность шума, $\xi(t)$ — белый гауссов шум. Сеть обучается определять, находится ли среднее значение стимула ниже или выше порога $u_{\text{th}} = 0{,}5$. Во время фазы ответа целевой выход

определяется как:

$$(y_1^*,\, y_2^*) = \begin{cases} (1,\, 0), & \text{если } \bar{u} < u_{\text{th}}, \\ (0,\, 1), & \text{если } \bar{u} \geq u_{\text{th}}. \end{cases} \tag{4.29}$$

В задаче контекстного принятия решения (CtxDM) контекстный сигнал указывает, какой из двух входов u_{mod_1} или u_{mod_2} сравнивать с порогом u_{th}, тогда как другой должен игнорироваться. Формально целевой выход зависит от контекста $c \in \{1, 2\}$:

$$(y_1^*,\, y_2^*) = \begin{cases} (1,\, 0), & \text{если } \bar{u}_{\text{mod}_c} < u_{\text{th}}, \\ (0,\, 1), & \text{если } \bar{u}_{\text{mod}_c} \geq u_{\text{th}}. \end{cases} \tag{4.30}$$

В задаче рабочей памяти Romo во время фазы стимуляции сеть получает два последовательных импульса f_1 и f_2, разделённых временно́й задержкой ΔT:

$$u_{\text{mod}_1}(t) = f_1 \cdot \mathbf{1}_{[t_1,\, t_1+\delta t]}(t) + f_2 \cdot \mathbf{1}_{[t_2,\, t_2+\delta t]}(t), \tag{4.31}$$

где $\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ — индикаторная функция интервала, $t_2 - t_1 = \Delta T$ — период задержки. В фазе ответа сеть генерирует выход:

$$(y_1^*,\, y_2^*) = \begin{cases} (1,\, 0), & \text{если } f_1 > f_2, \\ (0,\, 1), & \text{если } f_1 < f_2. \end{cases} \tag{4.32}$$

В задачах go/no-go сеть обучается воспроизводить входной стимул на выходе. В простой go-задаче целевой выход:

$$y_1^*(t) = u_{\text{mod}_1}(t) \cdot (1 - u_{\text{fix}}(t)), \tag{4.33}$$

то есть сигнал появляется на выходе только после отключения фиксации. В задаче с задержкой (GoDl) сеть получает короткий импульс и должна сохранить его значение в своём состоянии до конца периода задержки, после чего воспроизвести на выходе.

4.3.2. Процедура обучения и функция потерь

Обучение сети проводится методом обратного распространения ошибки во времени (Backpropagation Through Time, BPTT) с использованием суррогатных градиентов для преодоления недифференцируемости порогового механизма генерации спайков. Полная функция потерь имеет вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{task}} + \lambda_{\text{rate}}\,\mathcal{L}_{\text{rate}} + \lambda_{\text{weight}}\,\mathcal{L}_{\text{weight}}, \tag{4.34}$$

где $\mathcal{L}_{\text{task}}$ — основная функция потерь по задаче, $\mathcal{L}_{\text{rate}}$ — регуляризатор частоты спайков, $\mathcal{L}_{\text{weight}}$ — регуляризатор весов, λ_{rate} и λ_{weight} — коэффициенты регуляризации.

Основная функция потерь по задаче вычисляется как среднеквадратичная ошибка между выходом сети и целевым сигналом:

$$\mathcal{L}_{\text{task}} = \frac{1}{T_{\text{resp}}} \int_{T_{\text{stim}}}^{T_{\text{stim}}+T_{\text{resp}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{out}}} \left(y_j(t) - y_j^*(t)\right)^2 dt, \tag{4.35}$$

где $y_j^*(t)$ — целевой выход для j-го выходного нейрона.

Регуляризатор частоты спайков штрафует отклонение средней частоты от целевого значения r_{target}:

$$\mathcal{L}_{\text{rate}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{r}_i - r_{\text{target}}\right)^2, \tag{4.36}$$

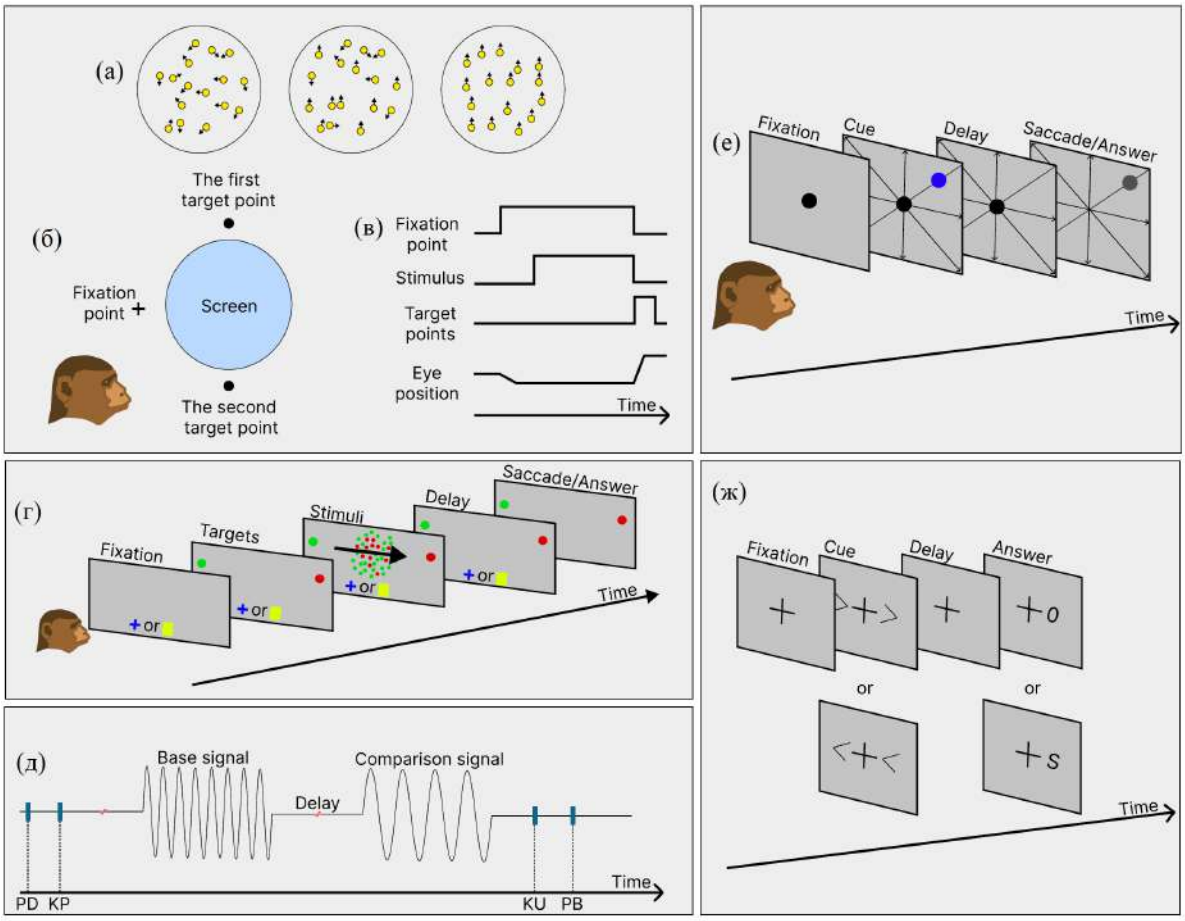

Рис. 4.11 – Схематическое представление экспериментальных прототипов целевых задач, используемых для обучения спайковой нейронной сети: (а–в) задача принятия решения; (г) задача контекстного принятия решения; (д) задача рабочей памяти Romo; (е, ж) задачи go/no-go. (а) Зрительный стимул с движущимися случайными точками с различным соотношением когерентно движущихся точек. (б) Обезьяна, наблюдающая экран, и позиции точки фиксации и целевых точек. (в) Последовательность событий во время испытания. (г) Сначала включается контекстный сигнал (синий крест или жёлтый квадрат), затем появляются две целевые точки (красная и зелёная); после этого показывается диаграмма со случайными точками с контролируемым преобладающим цветом и направлением когерентно движущихся точек; после периода задержки ожидается ответ саккадой в направлении преобладающего цвета или направления в зависимости от контекстного сигнала. (д) Задача Romo: сначала щуп помещается в руку обезьяны (PD); затем обезьяна кладёт свободную руку на неподвижную клавишу (KD); после чего подаются два вибротактильных стимула разных частот, разделённых задержкой; наконец, обезьяна отпускает клавишу (KU) и нажимает одну из двух кнопок для указания своего выбора (PB). (е) Пример go/no-go задачи: сначала выделяется точка фиксации на экране, затем сигнал появляется в одной из периферических позиций; после периода задержки обезьяна должна совершить саккаду к указанной цели. (ж) Пример go/no-go задачи для людей: сначала предъявляется визуальный стимул фиксации, затем включается один из двух возможных сигналов; после периода задержки появляется go- или no-go-сигнал.

где $\bar{r}_i$ — средняя частота спайков i-го нейрона за испытание. Этот член способствует разреженной активности и предотвращает чрезмерное возбуждение сети.

Регуляризатор весов имеет форму L_2-нормы:

$$\mathcal{L}_{\text{weight}} = \|\mathbf{W}_{\text{rec}}\|_F^2 + \|\mathbf{W}_{\text{in}}\|_F^2 + \|\mathbf{W}_{\text{out}}\|_F^2, \tag{4.37}$$

где $\|\cdot\|_F$ — норма Фробениуса.

Для обработки недифференцируемой функции Хевисайда в пороговом механизме используется суррогатный градиент. Функция спайка аппроксимируется гладкой функцией:

$$H(v - v_{\text{th}}) \approx \sigma_{\text{sur}}(v - v_{\text{th}}) = \frac{1}{1 + \exp\bigl(-\beta\,(v - v_{\text{th}})\bigr)}, \tag{4.38}$$

где β — параметр крутизны. При обратном распространении используется производная:

$$\frac{\partial H}{\partial v} \approx \beta\,\sigma_{\text{sur}}(v - v_{\text{th}})(1 - \sigma_{\text{sur}}(v - v_{\text{th}})). \tag{4.39}$$

Точность выполнения задачи определяется как доля правильных ответов:

$$\text{Accuracy} = \frac{1}{N_{\text{trials}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{trials}}} \mathbf{1}\left[\arg\max_j \bar{y}_j^{(n)} = \arg\max_j y_j^{*,(n)}\right], \tag{4.40}$$

где $\bar{y}_j^{(n)}$ — средний выход за фазу ответа в n-м испытании.

4.3.3. Функциональная специализация активных элементов

После того как спайковая нейронная сеть обучена выполнять множество задач, анализируется вклад индивидуальных нейронов в популяционную дина-

мику во время фаз стимуляции и ответа. На уровне отдельных элементов обученная нейронная сеть демонстрирует спайковые последовательности, настроенные на различные задачи и фазы испытания различными способами (рис. 4.12).

Для количественной характеристики функциональной специализации нейронов вводится индекс селективности. Для i-го нейрона и задачи k определяется средняя частота спайков:

$$\bar{r}_i^{(k)} = \frac{1}{T} \int_0^T r_i^{(k)}(t)\, dt, \tag{4.41}$$

где $r_i^{(k)}(t)$ — мгновенная частота спайков i-го нейрона при выполнении задачи k, усреднённая по испытаниям. Индекс селективности определяется как:

$$S_i = \frac{\max_k \bar{r}_i^{(k)} - \min_k \bar{r}_i^{(k)}}{\max_k \bar{r}_i^{(k)} + \min_k \bar{r}_i^{(k)} + \epsilon}, \tag{4.42}$$

где ϵ — малая константа для предотвращения деления на нуль. Значение $S_i \approx 1$ указывает на высокую функциональную специализацию (нейрон активен преимущественно при одной задаче), $S_i \approx 0$ — на смешанную селективность (нейрон откликается на многие задачи примерно одинаково).

Возникают нейронные подгруппы, которые преимущественно генерируют спайки во время реализации конкретной задачи, но почти молчат во время выполнения других задач. Например, одна и та же группа нейронов отвечает во время задач DM1 и Go2 (рис. 4.12а,в), тогда как другие нейронные группы отвечают во время тех же задач (рис. 4.12б,г). Видно, что нейроны в первой группе генерируют в среднем больше спайков, чем во второй.

Коэффициент вариации межспайковых интервалов (ISI) характеризует ре-

гулярность спайковой активности:

$$\mathrm{CV}_{\mathrm{ISI}} = \frac{\sigma_{\mathrm{ISI}}}{\mu_{\mathrm{ISI}}}, \tag{4.43}$$

где μ_{ISI} и σ_{ISI} — среднее и стандартное отклонение межспайковых интервалов. Значение $\mathrm{CV}_{\mathrm{ISI}} \approx 1$ соответствует пуассоновской статистике, характерной для коры головного мозга.

На рис. 4.12д показана полная спайковая активность сети при выполнении задачи рабочей памяти Romo. Видно, что во время периода задержки, когда входные стимулы не поступают, присутствуют активные нейроны, а во время фазы ответа в формировании выхода сети участвуют другие нейроны. Активность в период задержки может быть охарактеризована индексом устойчивой активности (отношением средней частоты в период задержки к средней частоте в период стимуляции):

$$P_i = \frac{\bar{r}_i^{\mathrm{delay}}}{\bar{r}_i^{\mathrm{stim}}}, \tag{4.44}$$

где $\bar{r}_i^{\mathrm{delay}}$ и $\bar{r}_i^{\mathrm{stim}}$ — средние частоты в периоды задержки и стимуляции соответственно. Нейроны с $P_i > 1$ демонстрируют повышенную активность в период задержки, что критично для поддержания рабочей памяти.

4.3.4. Кластерная структура обученной сети

После успешного обучения, при котором достигается точность выше 95 % для сетей с 400–600 нейронами, на основе анализа нейронной активности обнаруживается отчётливая *кластерная организация* нейронов (рис. 4.13). Для количественного описания кластерной структуры строится матрица нейронной

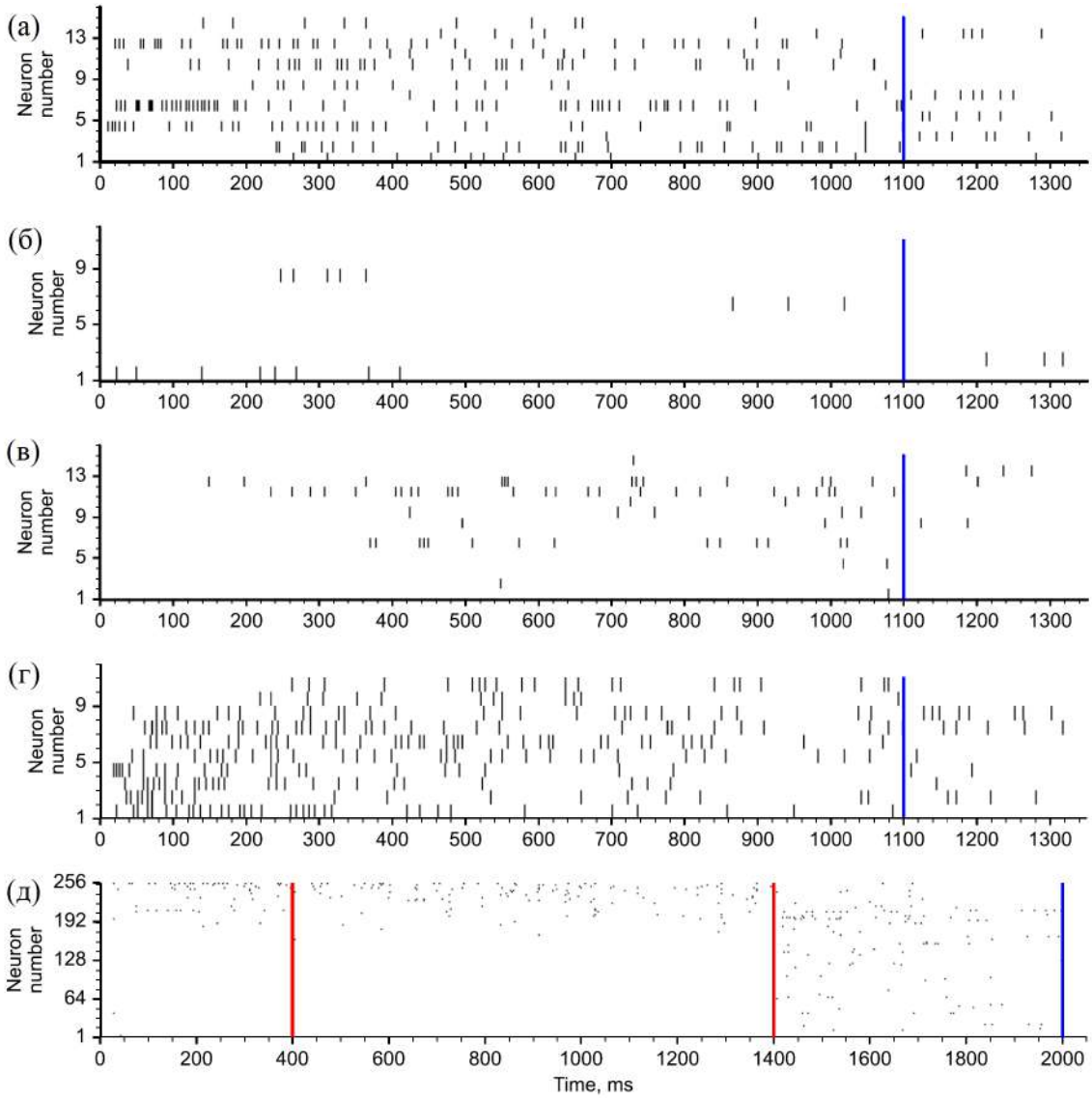

Рис. 4.12 – Спайковые последовательности двух нейронных подгрупп обученной сети при выполнении задачи DM1 (а, б) и задачи Go2 (в, г). Динамика первой подгруппы показана в (а) и (в), динамика второй подгруппы — в (б) и (г). (д) Полная спайковая активность сети при выполнении задачи Romo1. Видно, что во время периода задержки, когда входные стимулы не поступают, присутствуют активные нейроны, а во время фазы ответа в формировании выхода участвуют другие нейроны.

активности $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times N_{\text{task}}}$, элементы которой:

$$R_{ik} = \frac{\bar{r}_i^{(k)} - \min_j \bar{r}_j^{(k)}}{\max_j \bar{r}_j^{(k)} - \min_j \bar{r}_j^{(k)}}, \tag{4.45}$$

представляют нормированную среднюю частоту спайков i-го нейрона при выполнении задачи k.

Для обнаружения кластеров применяется метод k-средних с метрикой:

$$d(\mathbf{r}_i,\, \mathbf{c}_m) = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{c}_m\|_2, \tag{4.46}$$

где $\mathbf{r}_i = (R_{i1}, \ldots, R_{i,N_{\text{task}}})^\top$ — вектор активности i-го нейрона по всем задачам, $\mathbf{c}_m$ — центроид m-го кластера. Оптимальное число кластеров определяется по критерию силуэта:

$$s_i = \frac{b_i - a_i}{\max(a_i,\, b_i)}, \tag{4.47}$$

где a_i — среднее расстояние от i-го нейрона до других нейронов того же кластера, b_i — минимальное среднее расстояние до нейронов других кластеров.

Для иерархической кластеризации применяется метод Уорда, минимизирующий внутрикластерную дисперсию:

$$D(C_p,\, C_q) = \frac{|C_p|\,|C_q|}{|C_p| + |C_q|}\, \|\bar{\mathbf{r}}_{C_p} - \bar{\mathbf{r}}_{C_q}\|_2^2, \tag{4.48}$$

где C_p и C_q — объединяемые кластеры, $|C|$ — размер кластера, $\bar{\mathbf{r}}_C$ — центроид кластера.

Цветовая интенсивность на рис. 4.13 отражает нормированную среднюю частоту спайков для различных задач, а дендрограммы указывают на иерархическую кластеризацию нейронов и целевых задач. Дендрограмма в верхней части

показывает две основные нейронные группы в сети:

Группа смешанной селективности (наибольшая) состоит из нейронов с $S_i < 0{,}3$, которые относительно слабо активны и чья активность распределена по задачам равномерно. Для таких нейронов энтропия распределения активности по задачам:

$$H_i = -\sum_{k=1}^{N_{\text{task}}} p_i^{(k)} \log p_i^{(k)}, \quad p_i^{(k)} = \frac{\bar{r}_i^{(k)}}{\sum_m \bar{r}_i^{(m)}}, \tag{4.49}$$

близка к максимальной $H_{\max} = \log N_{\text{task}}$.

Группа функционально специализированных нейронов содержит отчётливо различимые кластеры нейронов с $S_i > 0{,}7$, преимущественно активных при выполнении конкретных задач. Их энтропия значительно ниже максимальной.

Дендрограмма слева отражает сходства и различия между целевыми задачами в терминах нейронной активности. Расстояние между задачами k и l определяется как:

$$D_{\text{task}}(k,\, l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (R_{ik} - R_{il})^2. \tag{4.50}$$

Задачи CtxDM1 и DM1 (как и CtxDM2 и DM2) располагаются на соседних ветвях дерева дендрограммы, показывая $D_{\text{task}}(\text{CtxDM1},\, \text{DM1}) < D_{\text{task}}(\text{CtxDM1},\, \text{Romo1})$, что указывает на сходство вычислительных механизмов, лежащих в основе их реализации.

4.3.5. Структура траекторий в фазовом пространстве

Для изучения динамических механизмов, лежащих в основе откликов сети в различных задачах, были проанализированы проекции высокоразмерных траекторий фазового пространства в низкоразмерное подпространство первых

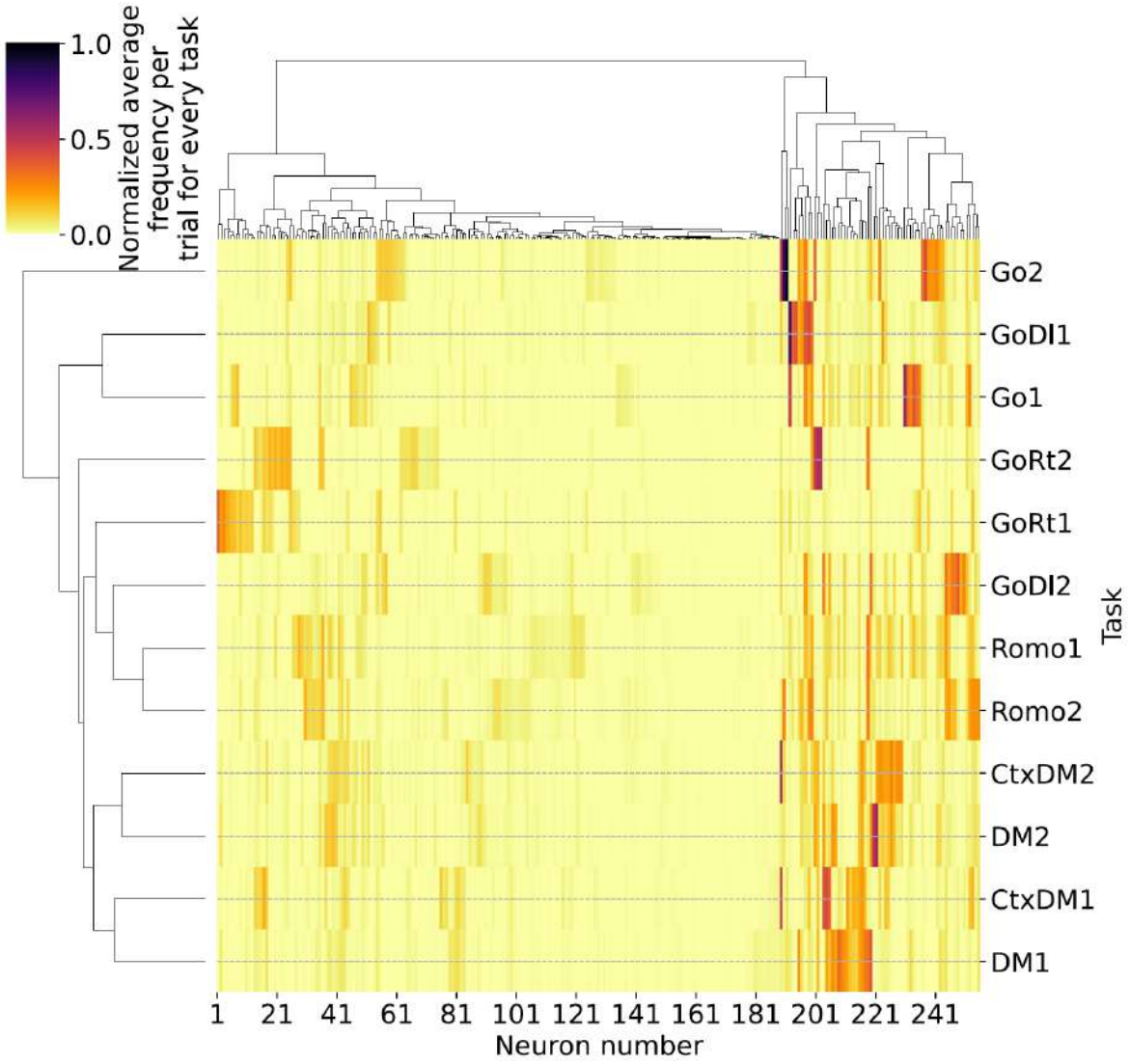

Рис. 4.13 – Кластерная структура нейронной сети после обучения, где цвет обозначает нормированную среднюю частоту спайков каждого нейрона во время каждой задачи. Дендрограммы слева и сверху показывают иерархические структуры относительно задач и нейронов соответственно. Сеть состоит из 256 нейронов и обучена с регуляризованной функцией потерь. Получено усреднение по 100 тестовым испытаниям каждой задачи.

трёх главных компонент (рис. 4.14). Метод главных компонент (PCA) применяется раздельно к мембранным потенциалам $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t))^\top$ и переменным адаптации $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_N(t))^\top$, которые эволюционируют на различных временны́х масштабах.

Ковариационная матрица для переменных $\mathbf{v}$ вычисляется как:

$$\mathbf{C}_v = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{v}(t) - \bar{\mathbf{v}})(\mathbf{v}(t) - \bar{\mathbf{v}})^\top dt, \tag{4.51}$$

где $\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{v}(t)\,dt$ — среднее значение. Собственные векторы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, соответствующие трём наибольшим собственным значениям $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, определяют базис для проекции:

$$\tilde{v}_k(t) = \mathbf{p}_k^\top (\mathbf{v}(t) - \bar{\mathbf{v}}), \quad k = 1,\, 2,\, 3. \tag{4.52}$$

Доля объяснённой дисперсии первыми K компонентами:

$$\mathrm{VE}_K = \frac{\sum_{k=1}^{K} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{N} \lambda_k}. \tag{4.53}$$

Для переменных адаптации $\mathrm{VE}_3^{(a)} \approx 0{,}85$, тогда как для мембранных потенциалов $\mathrm{VE}_3^{(v)} \approx 0{,}65$, что указывает на более низкоразмерную организацию медленной динамики.

В случае задачи DM проекции на подпространства обоих типов отчётливо показывают две различимые стадии. Во время первой стадии (интеграция входных сигналов) траектории с различными значениями входного стимула u_{mod_1} медленно расходятся друг от друга. Скорость расхождения характеризуется:

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{a}}^{(+)}(t) - \tilde{\mathbf{a}}^{(-)}(t)\| \propto |u_{\mathrm{mod}_1} - u_{\mathrm{th}}|, \tag{4.54}$$

где $\tilde{\mathbf{a}}^{(+)}$ и $\tilde{\mathbf{a}}^{(-)}$ — траектории для стимулов выше и ниже порога соответственно.

Во время второй стадии траектории быстро движутся к одному из двух метастабильных состояний $\mathbf{a}_1^*$ и $\mathbf{a}_2^*$, каждое из которых соответствует конкретной альтернативе решения. Метастабильность означает, что это не асимптотически устойчивые состояния, но они сохраняются в течение конечного времени фазы ответа.

Для задачи CtxDM возникают два потока траекторий, ответственных за активацию каждого из двух контекстов. Контекстный сигнал определяет начальное условие в расширенном пространстве:

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}_{\text{ctx}}, \tag{4.55}$$

где $\delta\mathbf{a}_{\text{ctx}}$ — контекстно-зависимое смещение. Внутри каждого потока наблюдаются два различных конечных состояния, соответствующих двум возможным решениям.

Для задачи Romo (рис. 4.14д,е) ключевую роль играет медленное многообразие переменных адаптации. Быстрая спайковая динамика не может сформировать динамическую память в пределах интервала задержки. Напротив, проекции медленных переменных демонстрируют механизм рабочей памяти: варьирующиеся входные стимулы f_1 порождают расхождение траекторий, которое сохраняется во время задержки. Информация о первом стимуле кодируется позицией на линии метастабильных состояний:

$$\mathbf{a}^*(f_1) = \mathbf{a}_0^* + f_1 \cdot \mathbf{d}, \tag{4.56}$$

где $\mathbf{d}$ — направление линии аттрактора. После получения второго стимула f_2 траектории быстро перескакивают к одному из двух дискретных аттракторов в

зависимости от знака $(f_1 - f_2)$.

4.3.6. Роль адаптивной переменной

Использование адаптивных экспоненциальных нейронов с медленной переменной ($\tau_a = 2$ с) оказывается критически важным для задач, требующих сохранения следа стимула во времени. Для количественной оценки этого эффекта проведён сравнительный анализ производительности сетей с различными моделями нейронов.

Сети без адаптации, построенные на основе классических LIF-нейронов:

$$\tau_m \frac{dv_i}{dt} = -v_i + I_i^{\text{syn}}(t), \tag{4.57}$$

существенно уступают в производительности на задачах Romo и GoDl. Точность на задаче Romo составляет:

$$\text{Accuracy}_{\text{LIF}}^{\text{Romo}} \approx 0{,}65 \quad \text{vs} \quad \text{Accuracy}_{\text{AdEx}}^{\text{Romo}} \approx 0{,}95. \tag{4.58}$$

С динамической точки зрения медленная переменная адаптации реализует *динамическую память*. Уравнение для переменной адаптации можно переписать в интегральной форме:

$$a_i(t) = a_i(0)\, e^{-t/\tau_a} + \frac{a_{\text{current}}}{\tau_a} \int_0^t v_i(s)\, e^{-(t-s)/\tau_a}\, ds, \tag{4.59}$$

что показывает, что $a_i(t)$ представляет собой экспоненциально взвешенную историю мембранного потенциала. Эффективное время памяти определяется как:

$$\tau_{\text{mem}} \approx \tau_a \left(1 + \frac{a_{\text{current}} \cdot \bar{v}}{\bar{a}}\right), \tag{4.60}$$

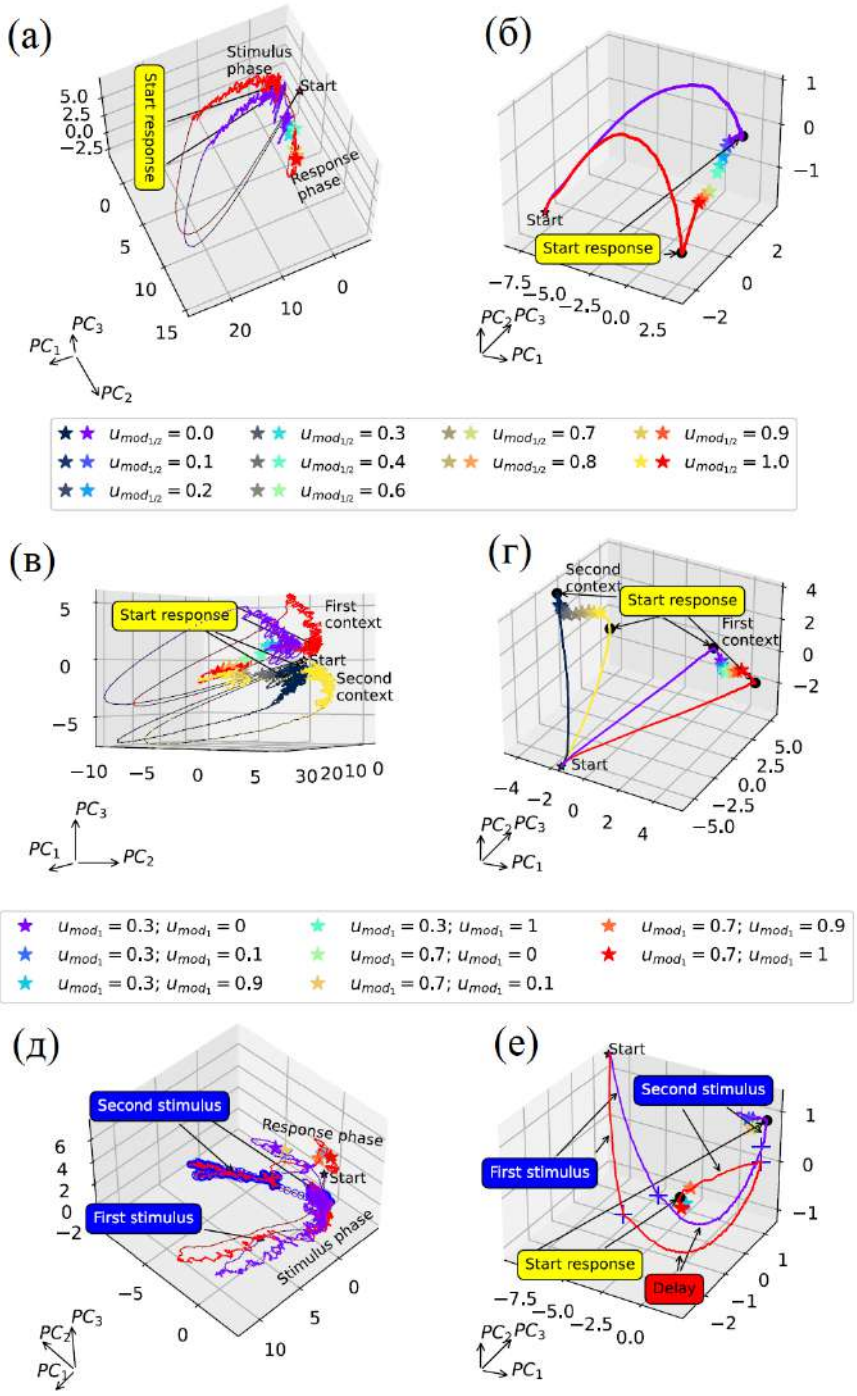

Рис. 4.14 – Проекции траекторий нейронной активности на подпространство первых трёх главных компонент для переменных v_j (левый столбец) и a_j (правый столбец) для сети с 256 нейронов и регуляризованной функцией потерь при выполнении задач DM (а,б), CtxDM (в,г) и Romo (д,е). Чёрная звезда указывает начало каждого испытания, цветные звёзды показывают точки завершения. Чёрная точка указывает начало фазы ответа. Символы импульсов обозначают периоды задержки (е). Для наглядности траектории показаны только для минимальных и максимальных значений входов. Цветные звёздочки в левом столбце показывают 100-ю итерацию соответствующей фазы ответа, а в правом столбце — последнюю итерацию фазы ответа.

что для типичных параметров даёт $\tau_{\text{mem}} \approx 2$–$3$ с, достаточно для сохранения следа стимула в периоды задержки.

В пространстве состояний это соответствует формированию медленного многообразия:

$$\mathcal{M}_{\text{slow}} = \{(\mathbf{v},\, \mathbf{a}) \colon \mathbf{v} = \mathbf{v}^*(\mathbf{a})\}\,, \tag{4.61}$$

где $\mathbf{v}^*(\mathbf{a})$ — квазистационарное значение мембранных потенциалов при фиксированных переменных адаптации. На этом многообразии система может медленно эволюционировать, сохраняя в значениях переменных адаптации информацию о предшествовавших стимулах — механизм, аналогичный динамике вдоль линии аттрактора (непрерывного семейства устойчивых неподвижных точек, вдоль которого движение нейтрально и положение системы определяется начальными условиями).

Переключение между задачами реализуется как переход между метастабильными областями фазового пространства. В сетях, обученных без регуляризации частоты спайков ($\lambda_{\text{rate}} = 0$), в отсутствие входов наблюдается спонтанная хаотическая активность. Максимальный показатель Ляпунова:

$$\lambda_{\max} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}(0)\|} > 0, \tag{4.62}$$

где $\delta\mathbf{x}(t)$ — малое возмущение траектории. Положительный $\lambda_{\max}$ указывает на хаотическую динамику, которая может рассматриваться как «исследовательский режим» сети, обеспечивающий быстрый доступ к различным областям пространства состояний.

В сетях с регуляризацией частоты спайков ($\lambda_{\text{rate}} > 0$) нулевые входы при-

водят к молчащему стационарному состоянию:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}^* = \mathbf{0}, \quad \lambda_{\max} < 0. \tag{4.63}$$

Переключение между задачами в этом случае происходит медленнее, поскольку требуется активация соответствующих популяций из состояния покоя. Однако регуляризация позволяет достигать сопоставимой производительности с существенно меньшим числом нейронов — $N = 256$ против $N = 600$ без регуляризации — что указывает на более эффективное использование ресурсов сети:

$$\eta = \frac{\text{Accuracy}}{N \cdot \bar{r}}, \tag{4.64}$$

где η — эффективность использования ресурсов, $\bar{r}$ — средняя частота спайков по сети.

Выводы

Результаты раздела показывают, что многозадачное обучение порождает кластерную организацию с переключаемыми функциональными подпространствами — каждая задача реализуется в своей области фазового пространства, а контекстный сигнал управляет переходами между ними. Установлено, что различные типы задач требуют различных динамических структур: дискретные аттракторы для задач выбора, линии аттракторов для рабочей памяти, непрерывные многообразия для аналогового выхода. Разделение временны́х масштабов через медленную адаптационную переменную играет ключевую роль в задачах, требующих хранения информации. Во всех разделах главы обучение проводилось с учителем. Остаётся открытым вопрос: приводит ли обучение с подкреплением к тем же динамическим структурам, что и обучение с учителем, при

решении идентичных задач с одинаковой точностью? Прямое контролируемое сопоставление двух парадигм на одной и той же задаче контекстно-зависимого принятия решений проводится в заключительном разделе главы.

4.4. Влияние парадигмы обучения на структуру фазового пространства

Вопрос, который ставится и решается в настоящем разделе, следующий: являются ли обучение с учителем (SL) и с подкреплением (RL) альтернативными путями к одному и тому же динамическому решению, или же они ведут к *качественно различным вычислительным стратегиям*? Ответ невозможно получить из одних лишь поведенческих метрик (точность, время реакции), поскольку различные динамические механизмы могут порождать одинаковые выходные отклики.

До настоящей работы прямых сравнений RL и SL в контролируемых условиях — идентичная задача, идентичная архитектура, идентичные начальные условия — с анализом *внутренней динамики*, а не только производительности, не проводилось. В работе [26] авторы анализировали обученные SL-сети post hoc; в работе [18] исследовались RL-сети, но не сопоставлялимь с SL-аналогами; в работе [24] авторы использовали исключительно SL. Существующие подходы, как правило, фокусировались на отдельных аспектах — либо классификации аттракторов, либо популяционном анализе, либо способах представления информации в активности элементов — без объединения этих методов.

Настоящий раздел описывает результаты разработки и применения многоуровневой методики для систематического сопоставления RL и SL на контекстно-зависимой задаче принятия решений.

4.4.1. Введение и постановка задачи

Для корректного сопоставления парадигм изучаемый сети обучаются на одной и той же задаче — контекстно-зависимом двухальтернативном выборе (CtxDM) по образцу эксперимента Манте и соавторов [24].

Когерентность и контекст. Агент получает два зашумлённых потока стимулов, соответствующих двум «модальностям». Для каждого потока определяется *когерентность* — величина, характеризующая преобладание одного из двух компонентов стимула ($\text{coh} = A_1 - A_2 \in [-1, 1]$): положительная когерентность указывает на преобладание первого компонента, отрицательная — второго. *Контекстный сигнал* задаёт, какой из двух потоков является целевым (релевантным для принятия решения); нерелевантный поток должен игнорироваться. Агент должен интегрировать целевой поток и выбрать одно из двух действий в зависимости от знака когерентности релевантного стимула. Испытание включает четыре этапа: фиксация, предъявление стимулов, задержка и принятие решения (рис. 4.15а).

Используется одна и та же архитектура — рекуррентная сеть (нелинейная сеть активных элементов) с функцией активации ReLU и $N = 250$ элементами:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{W}_{hh}\,\mathbf{h}_t + \mathbf{W}_{ih}\,\mathbf{I}_t), \tag{4.65}$$

где $\mathbf{h}_t \in \mathbb{R}^{250}$ — вектор активностей, $\mathbf{I}_t \in \mathbb{R}^7$ — входной вектор (фиксация, стимулы двух модальностей, контекстные сигналы). Выход сети преобразуется в распределение вероятностей действий через функцию *softmax* — нормирующее преобразование, которое переводит вектор произвольных вещественных

чисел $\mathbf{o} = (o_1, \ldots, o_K)$ в вектор вероятностей:

$$p_k = \frac{\exp(o_k)}{\sum_{j=1}^{K} \exp(o_j)}, \quad k = 1, \ldots, K, \tag{4.66}$$

так что $p_k > 0$ и $\sum_k p_k = 1$. Здесь $K = 3$ (фиксация, выбор 1, выбор 2).

Входной вектор содержит аддитивный шум: $\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_t^{\text{pure}} + \alpha\, \mathbf{r}_t$, $\alpha = 0{,}1$.

Различие между парадигмами:

- **Обучение с учителем (SL)**: минимизируется кросс-энтропия — мера расхождения между предсказанным распределением вероятностей $\mathbf{p}$ и целевым распределением $\mathbf{q}$:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\sum_{k=1}^{K} q_k \ln p_k, \tag{4.67}$$

  где $q_k = 1$ для правильного действия и $q_k = 0$ для остальных. Целевые метки явно указывают правильное действие на каждом шаге; оптимизация — алгоритм «Адам» [217].

- **Обучение с подкреплением (RL)**: максимизируется ожидаемое кумулятивное вознаграждение ($+1$ за правильный выбор, -1 за ошибку) методом PPO (Proximal Policy Optimization — алгоритм обучения с подкреплением на основе оценки преимущества действия) [228]. В отличие от обучения с учителем, при обучении с подкреплением на каждом шаге отсутствует явный «правильный ответ»: агент получает лишь скалярное вознаграждение по итогам выполненного действия и должен самостоятельно определить оптимальную стратегию путём проб и ошибок (исследования пространства действий).

Для каждого условия обучено 50 сетей с различными случайными началь-

ными условиями. Ширина инициализации весов δ варьировалась в диапазоне от $0{,}05$ до $0{,}3$ для исследования роли начального разнообразия динамических режимов в сети (далее — *начальная динамическая сложность*, то есть число и характер неустойчивых мод, задаваемых начальным распределением весов).

Обучение прекращалось при достижении точности 95% на валидационной выборке (1000 испытаний).

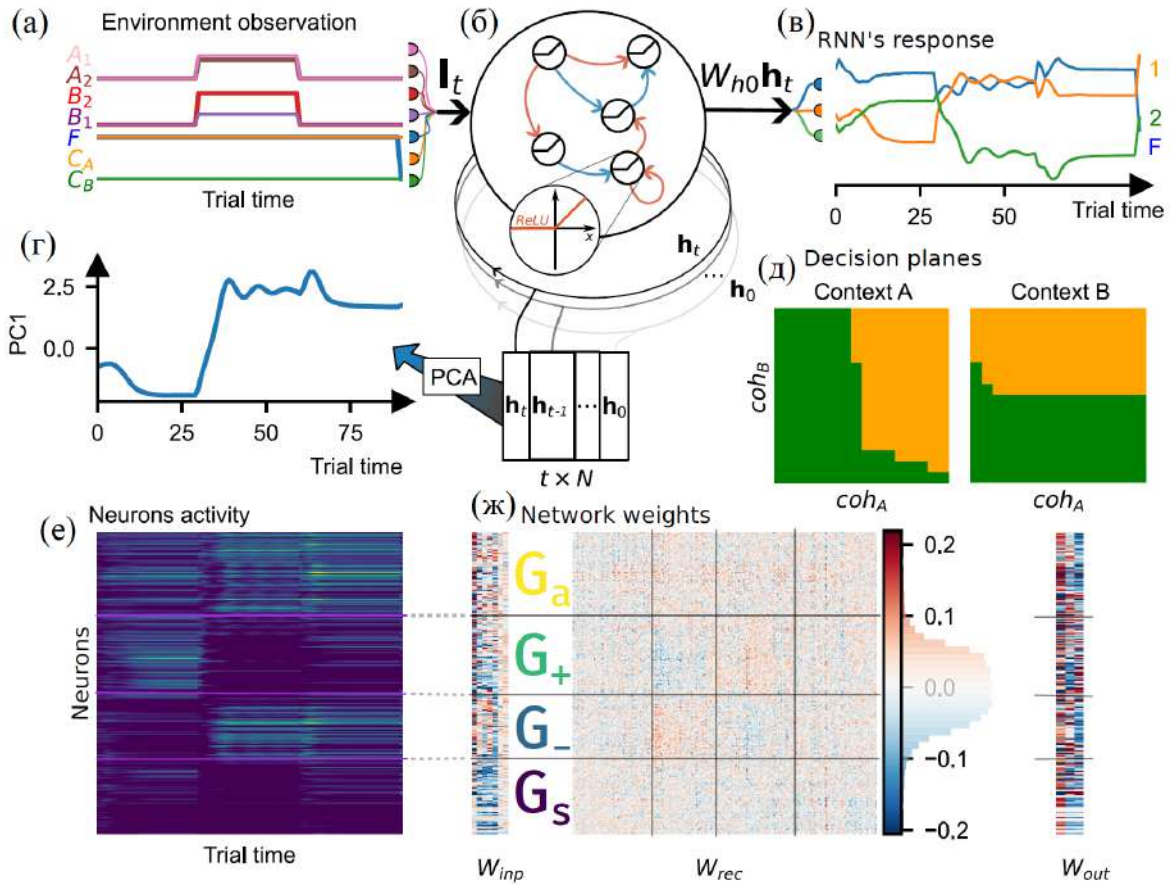

Рис. 4.15 – Задача и самоорганизующаяся архитектура RL-обученной сети. (а) Временна́я структура испытания: фиксация, стимуляция, задержка, решение. (б) Архитектура рекуррентной сети с $N = 250$ элементами. (в) Выходные вероятности обученной сети. (г) Первая главная компонента активности. (д) Граница решений в пространстве когерентностей. (е) Растровый график активности. (ж) Матрица рекуррентных весов, реорганизованная по функциональным популяциям: блочная структура с внутрипопуляционным возбуждением и межпопуляционным торможением возникла исключительно в процессе обучения.

4.4.2. Архитектура сетей и методология анализа

Разработанная методология объединяет три взаимодополняющих уровня анализа.

1. Классификация аттракторов через собственные числа. Функция активации ReLU является кусочно-линейной: при фиксированном наборе «активных» элементов $\mathcal{A}$ (для которых $h_j > 0$) динамика (4.65) сводится к линейной системе

$$\mathbf{h}_{t+1}^{\mathcal{A}} = \mathbf{W}_{hh}^{\mathcal{A}}\, \mathbf{h}_t^{\mathcal{A}} + \mathbf{s}^{\mathcal{A}}, \tag{4.68}$$

где $\mathbf{W}_{hh}^{\mathcal{A}}$ — подматрица рекуррентных весов для активных элементов, $\mathbf{s}^{\mathcal{A}}$ — эффективный вход. Тип аттрактора определяется собственными числами $\mathbf{W}_{hh}^{\mathcal{A}}$: *устойчивая неподвижная точка* при $|\mu_{\text{lead}}| < 1$; *квазипериодический аттрактор* при комплексно-сопряжённой ведущей паре с $|\mu| > 1$ (ограниченность подтверждается прямым моделированием). Для каждой сети классификация проводилась на сетке 44×44 по когерентностям обоих контекстов (3872 точки).

2. Популяционный анализ методом сравнения с эталонными профилями. Для каждого элемента n строится матрица $\mathbf{M}^{(n)}$ профилей активности по двумерному пространству когерентностей (набору всех пар значений когерентностей двух модальностей) с целочисленными метками (0 — молчащий, 1 — активен только в контексте A, 2 — только в контексте B, 3 — в обоих).

Элемент приписывается к одной из четырёх популяций G_s (молчащие), G_+ (преимущественно активные при положительной когерентности), G_- (при отрицательной), G_a (активные при любом ненулевом стимуле) путём минимизации отклонения от *эталонных профилей* — теоретических матриц $\mathbf{M}^c$, каждая из которых представляет канонический (наиболее типичный) вид активности для соответствующей функциональной группы, определённый по результатам

предварительного анализа обученных сетей:

$$c^* = \underset{c \in \{G_s, G_+, G_-, G_a\}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i,j} (M_{i,j}^{(n)} - M_{i,j}^{c})^2. \tag{4.69}$$

3. Информационно-теоретическая валидация. Для количественной оценки селективности элементов использовалась *взаимная информация* (MI) — величина, измеряющая статистическую зависимость между двумя случайными величинами. Формально, для дискретной переменной X (активность элемента) и бинарной переменной Y (знак когерентности):

$$\mathrm{MI}(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \ln \frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}. \tag{4.70}$$

Если X и Y статистически независимы, то $\mathrm{MI} = 0$; чем сильнее зависимость, тем больше MI.

Здесь Y — *знак основной когерентности*, то есть бинарная переменная, указывающая, положительна ($Y = +1$) или отрицательна ($Y = -1$) когерентность стимула, релевантного для данного контекста. MI вычислялась методом GCMI (Gaussian Copula Mutual Information) [229].

Статистическая значимость оценивалась *пермутационным тестом с поправкой Холма*: для каждого элемента формировалось нулевое распределение MI путём $10\,000$-кратного случайного перемешивания меток Y относительно X (пермутация разрушает зависимость, но сохраняет маргинальные распределения); наблюдаемое значение MI сравнивалось с этим нулевым распределением. Множественные сравнения (по всем элементам одновременно) корректировались последовательной процедурой Холма для контроля семейного уровня ошибки $\alpha = 0{,}01$.

4.4.3. Качественное различие структур фазового пространства

Обе парадигмы достигают сопоставимой точности (>95%), однако на основе анализа внутренней динамики выявлены принципиальные различия (рис. 4.16, табл. 4.1).

На основе проведённого исследования установлено, что в RL-обученных сетях формируются решения с разнообразной квазипериодической динамикой, особенно для неоднозначных стимулов с низкой когерентностью: доля квазипериодических аттракторов составляет 30–60%. В SL-обученных сетях подавляющее большинство решений представляют собой устойчивые неподвижные точки по всему пространству когерентностей (то есть для всех пар значений когерентностей двух модальностей): доля квазипериодических аттракторов <10% (рис. 4.16а–г).

Данный эффект существенно зависит от ширины инициализации весов δ. Бóльшая δ (более широкое начальное распределение) значительно усиливает распространённость осцилляторной динамики в RL-сетях, но практически не влияет на SL-сети (рис. 4.17д–з). Эта асимметрия указывает на то, что в процессе обучения с подкреплением исследование пространства действий методом проб и ошибок позволяет использовать начальную динамическую сложность, тогда как градиентный спуск при обучении с учителем активно подавляет её, формируя простейшие устойчивые решения.

Устойчивое преобладание квазипериодических аттракторов в RL-сетях воспроизводится и для более простой задачи DM без контекстной зависимости (рис. 4.17ж, з), что указывает на общность этого результата.

Таблица 4.1 – Сравнительная характеристика сетей, обученных методами RL и SL, при сопоставимой точности (≈95%).

Характеристика	RL	SL
Доля квазипериодических аттракторов	30–60%	$<$10%
Баланс популяций $\lvert G_+\rvert/\lvert G_-\rvert$	$\approx 1{,}0$	0,5–2,0
Чувствительность к инициализации δ	Высокая	Низкая

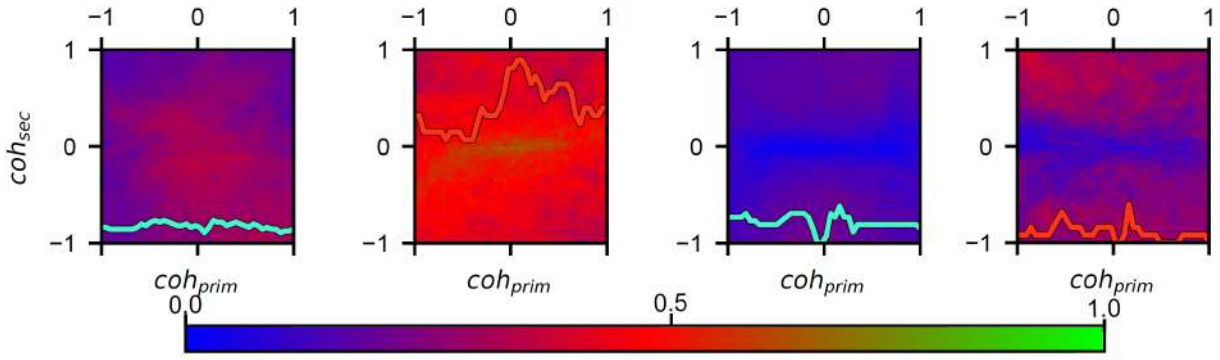

Рис. 4.16 – Сравнение типов аттракторов между RL и SL. (а–г) Вероятность квазипериодического аттрактора в пространстве когерентностей. В RL-сетях (а, б) систематически формируются осцилляторные решения для неоднозначных стимулов; SL-сети (в, г) сходятся к неподвижным точкам. Расхождение усиливается при более широкой инициализации. (а, в): $\delta = 0{,}1$; (б, г): $\delta = 0{,}3$. Цвет: от 0 (синий, неподвижная точка) до 1 (красный, квазипериодический).

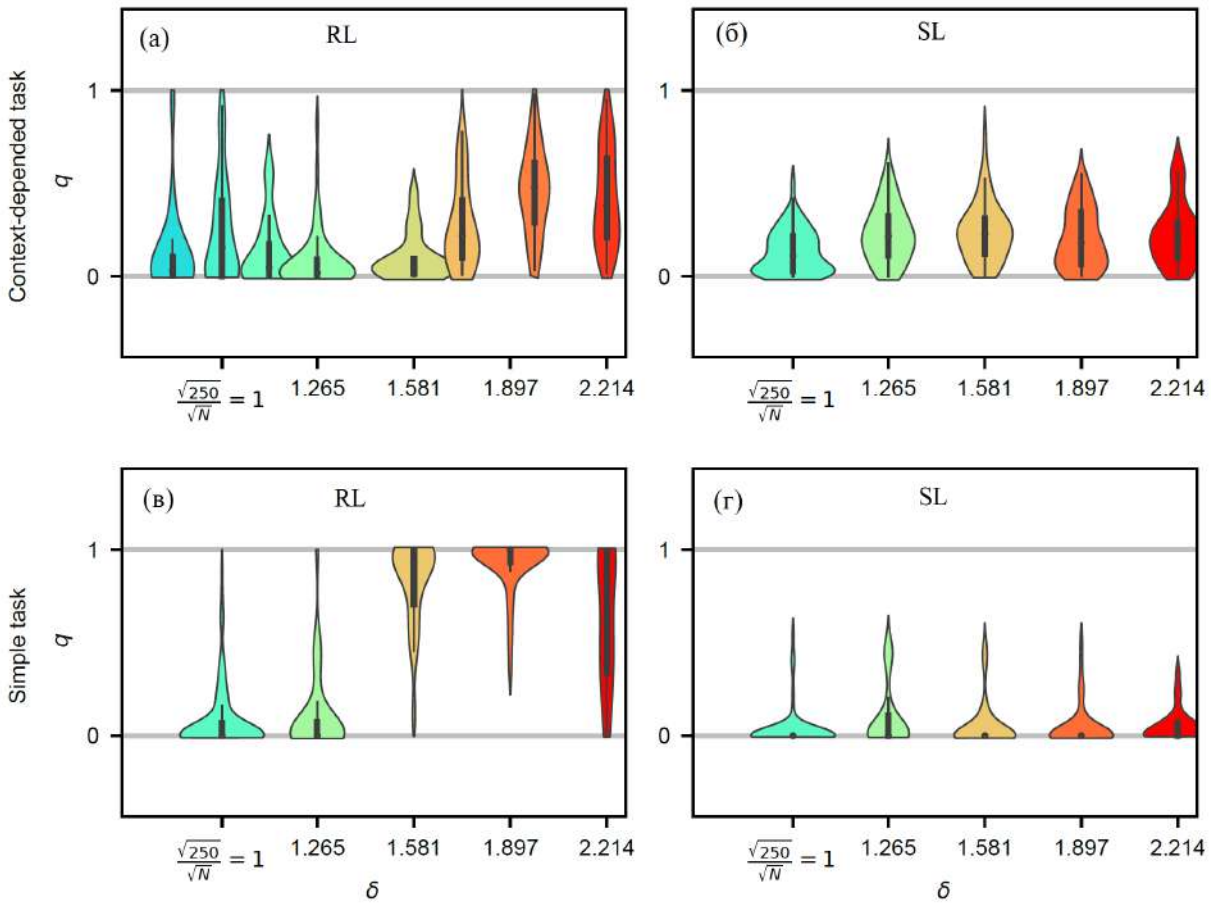

Рис. 4.17 – Агрегированная статистика типов аттракторов. (д, е) Доля квазипериодических аттракторов значительно выше в RL, чем в SL, при всех δ для задачи CtxDM. (ж, з) Тот же результат для простой задачи DM. Столбцы погрешностей — стандартное отклонение по ансамблям.

4.4.4. Квазипериодические аттракторы в сетях, обученных с подкреплением

Квазипериодическая динамика в RL-сетях не является побочным следствием обучения, а организована в *гибридную вычислительную архитектуру*, разделяющую кодирование стимулов и принятие решений.

Для визуализации высокоразмерных траекторий использовался *автокодировщик* — нейронная сеть, обучаемая сжимать входной вектор $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{250}$ в низкоразмерное представление $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ (кодирующая часть) и затем восстанавливать его обратно $\hat{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{250}$ (декодирующая часть) с минимальной ошибкой реконструкции. Трёхмерное представление $\mathbf{z}$ служит проекцией, сохраняющей основные геометрические соотношения между траекториями в полном 250-мерном пространстве. Визуализация позволяет наблюдать формирование гибридной архитектуры на протяжении обучения (рис. 4.18).

В полностью обученной сети различные функции отображаются на геометрически различные области фазового пространства:

- *Решения* представлены двумя устойчивыми дискретными аттракторами типа неподвижных точек (рис. 4.18д, синяя и красная звёзды), обеспечивающими робастную память принятого решения — выбора одного из двух вариантов ответа.

- *Входные данные* (значения когерентностей обеих модальностей) кодируются вдоль непрерывного низкоразмерного многообразия; положение состояния на этой поверхности параметрически отражает когерентности обеих модальностей, при этом кодирование часто задействует квазипериодическую динамику.

Во время испытания сеть сначала сходится к кодирующему многообразию

(чёрные траектории на рис. 4.18а, б), поддерживает состояние в период задержки (зелёные траектории) и затем переходит в бассейн притяжения аттрактора решения.

Это *спонтанное разделение* подсистемы кодирования (многообразие, на котором представлены значения стимулов) и подсистемы принятия решений (бистабильные неподвижные точки) является отличительной чертой RL-решения.

Формирование этой архитектуры прослеживается на трёх стадиях обучения (рис. 4.18в–д). В необученной сети пространство состояний не имеет функциональной организации: траектории для различных стимулов переплетены, задача неразрешима (рис. 4.18в). На промежуточной стадии поверхность кодирования начинает удлиняться вдоль оси основной когерентности, создавая различные пути для положительных и отрицательных входных данных, ещё до полного разделения аттракторов решения (рис. 4.18г). В полностью обученной архитектуре (рис. 4.18д) достигается оптимальное разделение кодирующего и решающего подпространств — итог всего процесса обучения.

4.4.5. Структура популяций в процессе обучения

Гибридная архитектура структурно реализуется самоорганизацией сети в четыре функционально специализированные популяции: G_s (молчащие), G_+ (преимущественно активные при положительной когерентности), G_- (при отрицательной) и G_a (активные при любом стимуле).

Формирование этой структуры отслеживалось параллельно с точностью и возникновением бистабильности решений (рис. 4.19). На ранних этапах обучения — при точности на уровне случайного угадывания — в сети отсутствуют как специализированные популяции, так и аттракторы решения. Критический скачок эффективности (выход с плато точности 0,5) точно совпадает с двумя

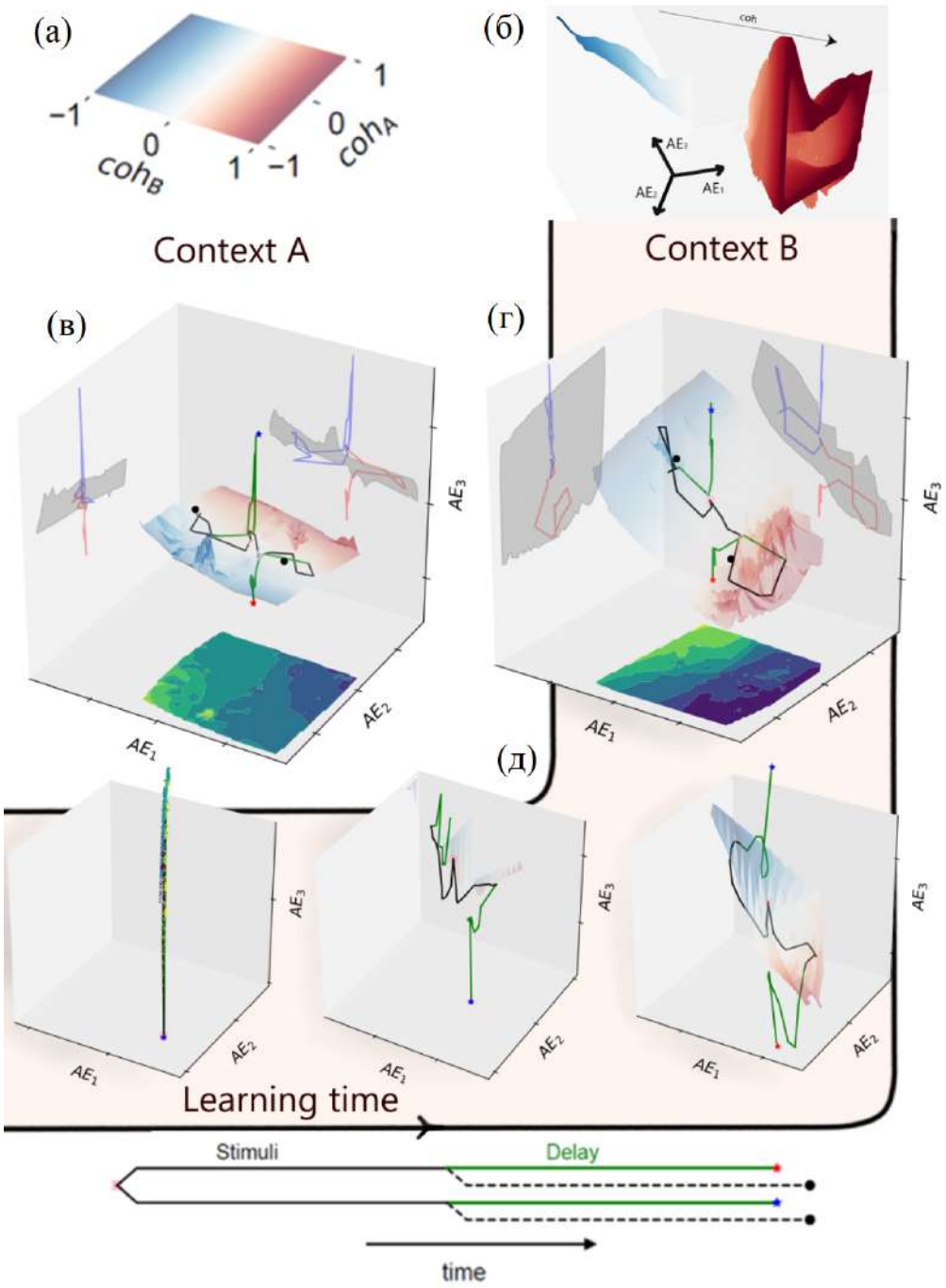

Рис. 4.18 – Формирование гибридной аттракторной архитектуры при обучении с подкреплением. (а, б) Низкоразмерные проекции траекторий для противоположных первичных когерентностей. Чёрное: стимуляция; зелёное: задержка; звёзды: аттракторы решения. (в–д) Три стадии обучения: (в) неструктурированное пространство состояний; (г) удлинение кодирующего многообразия; (д) полное разделение кодирующей и решающей подсистем. Цвет поверхности — комбинация когерентностей. Серая область — проекция плоскости нулевой когерентности.

событиями:

1. *возникновением бистабильности* — расщеплением единственной неподвижной точки на две, в результате чего динамика решений приобретает два устойчивых состояния, соответствующих двум альтернативным ответам (рис. 4.19в);

2. возникновением двух противоположных по предпочтениям популяций G_+ и G_- (рис. 4.19б).

Этот процесс наблюдается как для простой задачи DM, так и для контекстно-зависимой CtxDM. Для простой задачи распределение точности, при которой бистабильность возникает впервые, является бимодальным (пики вблизи 0,5 и 0,86), что отражает две различные стратегии обучения: быстрое формирование робастной бистабильности или длительное существование промежуточного, менее устойчивого механизма. В более сложной контекстно-зависимой задаче второй пик практически сливается с первым, что указывает на то, что сложность задачи ускоряет формирование робастной бистабильной архитектуры.

Популяционный баланс как характерная черта RL-решения. Определяющей характеристикой RL-решения является формирование популяций G_+ и G_- *приблизительно равного размера* ($|G_+|/|G_-| \approx 1{,}0$). Этот баланс не случаен; он представляет устойчивую структурную особенность, воспроизводимую при обучении с подкреплением: равные по размеру ансамбли, кодирующие конкурирующие варианты, обеспечивают гибкость и избегают чрезмерной специализации — форма неявной регуляризации. В SL-сетях популяции типично формируются существенно гетерогенными и несбалансированными ($|G_+|/|G_-|$ варьируется от 0,5 до 2,0) при той же точности.

Функциональная организация проявляется в структуре связей. Реоргани-

зация матрицы $\mathbf{W}_{hh}$ по популяционной принадлежности обнаруживает классическую архитектуру «победитель получает всё» (рис. 4.15ж): сильные положительные связи внутри G_+ и G_- (самовозбуждение), сильные отрицательные — между ними (взаимное торможение). Эта архитектура не задавалась, а возникла спонтанно.

На основе информационно-теоретического анализа подтверждены функциональные роли: расчёт взаимной информации показывает, что элементы G_+ избирательно кодируют положительную когерентность, G_- — отрицательную, а внутри G_a обнаруживаются непересекающиеся подгруппы с противоположными предпочтениями — сложный механизм контекстно-зависимой маршрутизации информации.

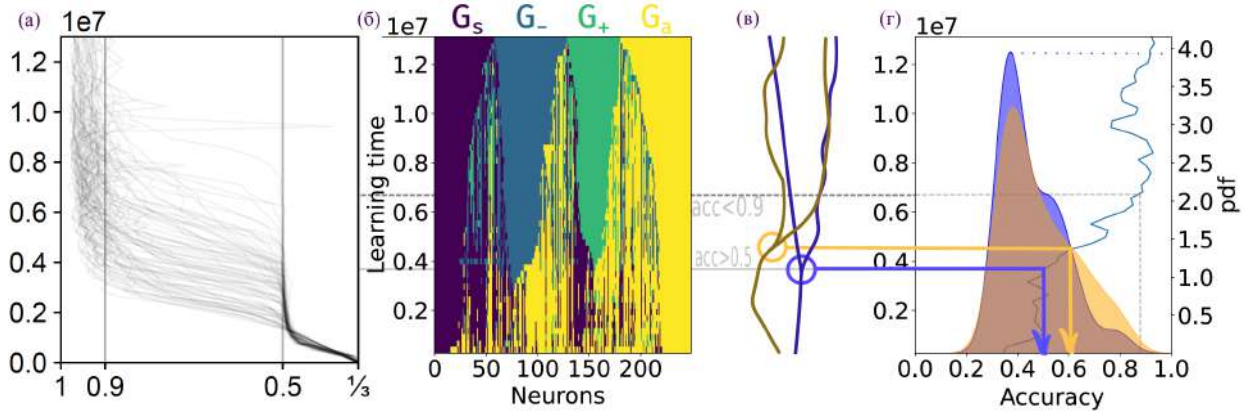

Рис. 4.19 – Связь самоорганизации популяций, производительности и бистабильности в RL-сетях. (а) Кривые обучения. (б) Четыре функциональные популяции; G_+ и G_- формируются приблизительно равными по размеру. (в) Возникновение бистабильности: расщепление аттрактора решения; цвет — контекст. (г) Скачок точности с плато 0,5 коррелирует с возникновением бистабильности и формированием популяций.

4.4.6. Парадигма обучения как физический параметр

Совокупность результатов позволяет сформулировать центральный вывод раздела: *парадигма обучения является таким же физическим параметром системы, как топология связей или характеристики отдельных элементов*.

При идентичной задаче, архитектуре, размере сети и начальных условиях — RL и SL порождают качественно различные аттракторные ландшафты.

Это различие имеет ясную механистическую интерпретацию. Обучение с учителем направляется явными сигналами ошибки на каждом шаге; градиентный спуск минимизирует расхождение между текущим и целевым выходом, что ведёт к формированию простейших устойчивых решений — неподвижных точек. Градиент ошибки при обучении с учителем активно подавляет начальную динамическую сложность.

Обучение с подкреплением оптимизирует кумулятивное вознаграждение через исследование пространства действий: отсутствие явного «правильного ответа» на каждом шаге создаёт условия для формирования разнообразных стратегий. Процесс исследования пространства действий сетью-агентом, направляемый вознаграждением, способен использовать начальную динамическую сложность (задаваемую δ) для формирования квазипериодических аттракторов и гибридных архитектур — если они улучшают конечный результат.

Выводы

Прямое сопоставление двух парадигм обучения на идентичных задачах позволяет сформулировать принцип: способ обучения качественно определяет структуру фазового пространства. Обучение с подкреплением формирует гибридные аттракторные архитектуры и сбалансированные популяции, тогда как обучение с учителем сводит динамику к простым неподвижным точкам при той же точности. Это показывает, что поведенческая эквивалентность не подразумевает механистической: за одинаковым внешним результатом скрываются принципиально различные внутренние стратегии. Совокупность результатов всех четырёх разделов главы формирует единую картину: обучение полностью

обучаемых сетей — это управляемая деформация фазового пространства, а тип формируемых структур определяется задачей, моделью элемента и парадигмой обучения.

4.5. Заключение к главе 4

Четвёртая глава посвящена исследованию механизмов формирования функциональной динамики в полностью обучаемых рекуррентных сетях — нелинейных сетях активных элементов, в которых все параметры (входные, рекуррентные и выходные веса) настраиваются в процессе обучения. Функциональные режимы описываются как геометрические структуры фазового пространства — аттракторы, инвариантные многообразия, каналы переходов — и как самоорганизующаяся архитектура популяций элементов. Рассмотрены задачи двухальтернативного выбора, интеграции непрерывных переменных, многозадачного переключения между режимами работы, а также проведено систематическое сопоставление обучения с учителем и обучения с подкреплением.

Основные результаты главы, опубликованные в работах [A21–A32], состоят в следующем.

1. Принятие решений в задаче двухальтернативного вынужденного выбора реализуется через формирование аттракторной структуры и эмерджентную популяционную специализацию. В спайковых сетях обучение формирует непрерывное семейство устойчивых неподвижных точек L_0, параметрически зависящее от разности входных сигналов, — более сложную структуру, чем пара изолированных состояний. Элементы сети спонтанно разделяются на функциональные группы с положительными внутригрупповыми и отрицательными межгрупповыми связями, реализуя меха-

низм «победитель получает всё» через рекуррентное усиление и взаимное подавление. Отдельные элементы демонстрируют смешанную селективность, качественно согласующуюся с данными о нейронах префронтальной коры. Метод разъединённых главных компонент позволяет выделить низкоразмерные подпространства, связанные с конкретными аспектами задачи, что подтверждает низкоразмерную природу функциональной динамики.

2. Обучение задаче интеграции непрерывных переменных приводит к самоорганизации так называемого кольцевого аттрактора и модульной архитектуры сети. Выходная популяция формирует кольцевой аттрактор для хранения угловой переменной в виде локализованного «бугра» активности, входная — блок управления с затухающей динамикой. Межпопуляционные связи приобретают топографически упорядоченную структуру, обеспечивающую управляемое перемещение «бугра» по кольцевому многообразию. Установлена критическая роль пространственного согласования: перестановка элементов при сохранении значений весов полностью прекращает функцию интегрирования.

3. Многозадачное обучение порождает кластерную организацию с переключаемыми функциональными подпространствами. Сеть из адаптивных экспоненциальных элементов, обученная шести типам задач, формирует специализированные кластеры и группы смешанной селективности. Различные задачи реализуются через различные динамические структуры: дискретные аттракторы для задач выбора, линии аттракторов для рабочей памяти, непрерывные многообразия для аналогового выхода. Установлена ключевая роль медленной адаптационной переменной ($\tau_a \gg \tau_m$) в зада-

чах, требующих хранения информации.

4. Парадигма обучения является одним из параметров, определяющих качественную структуру фазового пространства. Систематическое сопоставление обучения с подкреплением и обучения с учителем на идентичных контекстно-зависимых задачах при сопоставимой точности ($>$95%) выявило принципиальные различия. Обучение с подкреплением формирует гибридные аттракторные архитектуры, сбалансированные функциональные популяции ($|G_+|/|G_-| \approx 1$) и архитектуру связей «победитель получает всё»; обучение с учителем преимущественно сводит динамику к неподвижным точкам и порождает несбалансированные ансамбли. Скачок производительности при обучении с подкреплением совпадает с возникновением бистабильности и формированием специализированных популяций. Поведенческая эквивалентность не подразумевает механистической: за одинаковой точностью скрываются качественно различные внутренние стратегии.

Результаты главы завершают концептуальную линию диссертации: от элементарных динамических механизмов в отдельных нелинейных элементах (глава 1) через коллективные режимы в сетях с фиксированной и адаптивной архитектурой (глава 2), целенаправленный синтез динамики в резервуарных сетях с частичной настройкой параметров (глава 3) к формированию функциональных режимов при полном обучении всех связей. Показано, что обучение полностью обучаемых сетей — это управляемая деформация фазового пространства, при которой формируются аттракторные структуры, адаптированные к решаемой задаче: дискретные аттракторы для задач выбора, непрерывные многообразия для интеграции и хранения, переключаемые подпространства для многозадач-

ности. Способ обучения — обучение с учителем или с подкреплением — является таким же существенным параметром, определяющим структуру фазового пространства, как топология связей или характеристики отдельных элементов. На протяжении всей главы используется единый аппарат нелинейной динамики — классификация аттракторов, анализ устойчивости, построение фазовых портретов, понижение размерности, — что обеспечивает единый язык описания для функциональных свойств обученных сетей различной архитектуры и различного назначения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию коллективной динамики и функциональных свойств обучаемых нелинейных сетей активных элементов. Центральный результат работы состоит в том, что обучение нелинейной сети активных элементов представляет собой управляемую деформацию фазового пространства, формирующую аттракторные структуры и траектории, необходимые для реализации функциональных свойств. Этот процесс исследован единым аппаратом нелинейной динамики — от одиночного элемента до полностью обучаемых сетей.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Описан новый тип релаксационных колебаний в дискретных быстро-медленных системах, в которых хаотическая динамика реализуется непосредственно на быстром временном масштабе. Сформулированы структурные условия на быструю подсистему, при выполнении которых в полной системе возникает аттрактор с чередованием участков медленных регулярных и быстрых хаотических движений. Доказано существование инвариантной области в фазовом пространстве и получена аналитическая оценка старшего показателя Ляпунова через коэффициент заполнения и показатель Ляпунова хаотического аттрактора быстрой подсистемы, показывающая, что хаотические свойства полной системы наследуются от быстрой подсистемы.

2. Исследовано влияние периодической модуляции управляющего параметра на переходный хаос в отображении лоренцевского типа. Получено аналитическое приближение для вероятности выживания в квазистационарном подходе, явно разделяющее монотонный и осциллирующий вклады. Установлены три качественно различных режима: экспоненциальное убывание при низких и высоких частотах модуляции и осциллирующее немонотонное убывание при промежуточных частотах. Показано, что периодическая модуляция, в отличие от монотонного изменения параметра, допускает как ускорение, так и замедление выхода из хаотической области. Построена карта времён жизни переходного хаоса в пространстве параметров модуляции, обнаруживающая мозаичную структуру с фрактальными границами.

3. Введена классификация моделей активных элементов, используемых на протяжении всей диссертации, установлена иерархия предельных переходов между ними и введена единая терминология динамического анализа, обеспечивающая единый язык описания для всех последующих глав.

4. Проведено систематическое исследование бассейновой устойчивости синхронизации пачечных колебаний в сетях типа «малый мир». Показана немонотонная зависимость бассейновой устойчивости от всех исследованных параметров — топологии, силы связи, плотности связей и параметров динамики элементов. Максимум достигается в области топологии «малого мира», что указывает на существование оптимального соотношения между регулярными и случайными свойствами структуры сети. Установлена корреляция между экстремумами бассейновой устойчивости и границами ступенчатой зависимости числа спайков в пачке, обнаруженной в главе 1,

отражающая связь между внутренней структурой колебаний одиночного элемента и глобальной синхронизуемостью сети.

5. Предложена модель адаптивной сети спайковых осцилляторов с событийной перестройкой топологии, порождающая множество метастабильных кластерных состояний. Введён формализм гиперсети — ориентированного графа переходов между кластерными состояниями, обеспечивающий переход от микродинамики осцилляторов к дискретному описанию функциональной динамики. Показано, что в автономном режиме система демонстрирует случайное блуждание по гиперсети, а при приложении стимула траектория детерминируется и сходится к стимул-специфичной воспроизводимой последовательности. Результаты подтверждены аппаратной реализацией на программируемой логической интегральной схеме.

6. В гетерогенных сетях осцилляторов и мультиплексных адаптивных сетях обнаружены механизмы самоорганизованного формирования доменных структур — пространственно-неоднородных коллективных режимов, возникающих без явной оптимизации параметров. Установлены три различных механизма их возникновения: корреляция между структурными и динамическими характеристиками элементов, межслоевая адаптивная связь с переносом доменной структуры на изначально однородный слой и внутренняя бистабильность элементов, приводящая к пространственному хаосу.

7. Установлен спектральный механизм формирования автономных аттракторов при обучении резервуарных сетей методом FORCE: обучение выходного сумматора создаёт спектральные выбросы эффективной матрицы

связей — собственные значения, покидающие круг сплошного спектра, — которые определяют доминирующие моды аттрактора. Число выбросов коррелирует со сложностью целевого паттерна, а их структура инвариантна относительно конкретной инициализации сети. Установлен принцип согласования временны́х масштабов: эффективность обучения максимальна при согласовании внутреннего масштаба элементов с характерным периодом целевого сигнала.

8. Показано, что в рамках той же резервуарной архитектуры для стимул-индуцированных задач обучение не подавляет хаос, а формирует в хаотическом фазовом пространстве детерминированные метастабильные маршруты, активируемые внешними импульсами. Тип задачи определяет тип формируемого динамического объекта: предельный цикл для автономной генерации, метастабильные маршруты для дискриминации входов или их сочетание для переключения между последовательностями.

9. Сформулирован и количественно подтверждён принцип вычислительного соответствия, связывающий эффективность решения задачи с топологией и геометрией представления в пространстве состояний резервуара. На задаче детекции фазовой когерентности систематически сопоставлены три физически различных субстрата — частотный, спайковый и осцилляторный. Установлено преимущество осцилляторного субстрата и обнаружен парадокс спайкового резервуара: статическое считывание не воспроизводит циклическую топологию задачи, тогда как динамическое считывание формирует представление с наиболее выраженной циклической структурой. Реализован экспериментальный электронный резервуар на цепочке связанных возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо с разработанной

методологией томографии ядра для диагностики вычислительной ёмкости физического субстрата.

10. Систематическое сопоставление фиксированных резервуаров и полносвязно обучаемых рекуррентных сетей на задаче контекстно-зависимой интеграции установило качественное различие структур фазового пространства: полное обучение формирует компактные низкоразмерные представления с глобальным разделением контекстов, недостижимым при фиксированной архитектуре. Разрыв производительности нарастает с увеличением горизонта памяти задачи, устанавливая фундаментальное ограничение фиксированной архитектуры.

11. Показано, что принятие решений в задаче двухальтернативного выбора реализуется через формирование аттракторной структуры и эмерджентную популяционную специализацию. В спайковых сетях обучение формирует непрерывное семейство устойчивых неподвижных точек, параметрически зависящее от разности входных сигналов. Элементы сети спонтанно разделяются на функциональные группы с положительными внутригрупповыми и отрицательными межгрупповыми связями, реализуя механизм «победитель получает всё» через рекуррентное усиление и взаимное подавление. Модульная структура не задаётся заранее, а возникает исключительно в процессе обучения. Метод разъединённых главных компонент позволяет выделить низкоразмерные подпространства популяционной активности, связанные с конкретными аспектами задачи.

12. Обучение задаче интеграции непрерывных переменных приводит к самоорганизации кольцевого аттрактора и модульной архитектуры сети: выходная субпопуляция формирует кольцевой аттрактор для хранения уг-

ловой переменной, входная — блок управления с затухающей динамикой. Установлена критическая роль пространственного согласования между входным кодом и структурой аттрактора: нарушение этого согласования при сохранении значений весов полностью уничтожает функцию интегрирования. Многозадачное обучение спонтанно порождает кластерную организацию с переключаемыми функциональными подпространствами, причём различные задачи реализуются через различные динамические структуры — дискретные аттракторы для задач выбора, линии аттракторов для рабочей памяти, непрерывные многообразия для аналогового выхода.

13. Установлено, что парадигма обучения является одним из параметров, определяющих качественную структуру фазового пространства. Систематическое сопоставление обучения с подкреплением и обучения с учителем на идентичных контекстно-зависимых задачах при сопоставимой точности выявило принципиальные различия: обучение с подкреплением формирует гибридные аттракторные архитектуры, сочетающие неподвижные точки с квазипериодическими аттракторами, и сбалансированные функциональные популяции с архитектурой связей «победитель получает всё»; обучение с учителем преимущественно сводит динамику к неподвижным точкам и порождает несбалансированные ансамбли. Поведенческая эквивалентность — одинаковая точность выполнения задачи — не подразумевает механистической эквивалентности: за одинаковым внешним результатом скрываются качественно различные внутренние динамические стратегии.

Совокупность полученных результатов образует единую методологию исследования нелинейных сетей активных элементов на языке динамических си-

стем — от анализа режимов одиночного элемента и коллективных явлений в сетях с фиксированными параметрами к целенаправленному синтезу функциональной динамики посредством обучения. Показано, что одни и те же динамические объекты — аттракторы, метастабильные состояния, бифуркации, переходные траектории — обнаруживаются как в свободных, так и в обученных сетях, что подтверждает применимость единого аппарата нелинейной динамики ко всему спектру рассмотренных задач. Обучение нелинейной сети — это управляемая деформация фазового пространства, а тип формируемых структур определяется решаемой задачей, свойствами элементов, топологией связей и способом обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Публикации автора по теме диссертации

Список литературы

[A1] *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю.,* ***Масленников О.В.****, Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2018. – Т. 26, № 4. – С. 5–58.

[A2] ***Maslennikov O.V.****, Nekorkin V.I.* Attractors of relaxation discrete-time systems with chaotic dynamics on a fast time scale // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2017. – Vol. 27, № 7. – P. 073104.

[A3] ***Maslennikov O.V.****, Nekorkin V.I., Kurths J.* Transient chaos in the Lorenz-type map with periodic forcing // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2018. – Vol. 28, № 3. – P. 033107.

[A4] *Klinshov V.V.,* ***Maslennikov O.V.****, Nekorkin V.I.* Jittering regimes of two spiking oscillators with delayed coupling // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. – 2016. – Vol. 1, № 1. – P. 197–206.

[A5] *Franović I.,* ***Maslennikov O.V.****, Bačić I., Nekorkin V.I.* Mean-field dynamics of a population of stochastic map neurons // Physical Review E. – 2017. – Vol. 96, № 1. – P. 012226.

[A6] ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I., Kurths J.* Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators // Physical Review E. – 2015. – Vol. 92, № 4. – P. 042803.

[A7] ***Масленников О.В.,*** *Некоркин В.И.* Адаптивные динамические сети // Успехи физических наук. – 2017. – Т. 187, № 7. – С. 753–764.

[A8] ***Maslennikov O.V.,*** *Shchapin D.S., Nekorkin V.I.* Transient sequences in a hypernetwork generated by an adaptive network of spiking neurons // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2017. – Vol. 375, № 2096. – P. 20160288.

[A9] ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I.* Hierarchical transitions in multiplex adaptive networks of oscillatory units // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2018. – Vol. 28, № 12. – P. 121101.

[A10] ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I.* Effects of structure-dynamics correlation on hierarchical transitions in heterogeneous oscillatory networks // The European Physical Journal Special Topics. – 2019. – Vol. 227, № 10-11. – P. 1221–1230.

[A11] *Emelianova A.A.,* ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I.* Disordered quenching in arrays of coupled Bautin oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2022. – Vol. 32, № 6. – P. 063110.

[A12] *Teng M., Wang Y., Dmitrichev A.S., Kasatkin D.V.,* ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I.* Similarity-smooth graph contrastive learning for community detection in adaptive oscillatory networks // Chaos, Solitons & Fractals. – 2025. – Vol. 200. – P. 116937.

[A13] ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I.* Collective dynamics of rate neurons

for supervised learning in a reservoir computing system // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – Vol. 29, № 10. – P. 103126.

[A14] *Пугавко М.М.,* ***Масленников О.В.****, Некоркин В.И.* Динамика сети дискретных модельных нейронов при контролируемом обучении системы резервуарных вычислений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2020. – Т. 28, № 1. – С. 77–89.

[A15] ***Maslennikov O.V.****, Shchapin D.S., Nekorkin V.I.* Binary classification via spatiotemporal dynamics in reservoir computing rings of FitzHugh–Nagumo neurons // The European Physical Journal Special Topics. – 2025. – Vol. 234. – P. 4033–4041.

[A16] *Emelianova A.A.,* ***Maslennikov O.V.****, Nekorkin V.I.* Higher-order interactions, adaptivity, and phase transitions in a novel reservoir computing model // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2025. – Vol. 35. – P. 103110.

[A17] *Pugavko M.M.,* ***Maslennikov O.V.****, Nekorkin V.I.* Dynamics of spiking map-based neural networks in problems of supervised learning // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2020. – Vol. 90. – P. 105399.

[A18] ***Maslennikov O.V.****, Gao C., Nekorkin V.I.* Internal dynamics of recurrent neural networks trained to generate complex spatiotemporal patterns // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2023. – Vol. 33, № 9. – P. 093125.

[A19] ***Maslennikov O.V.****, Nekorkin V.I.* Stimulus-induced sequential activity in

supervisely trained recurrent networks of firing rate neurons // Nonlinear Dynamics. – 2020. – Vol. 101. – P. 1093–1103.

[A20] ***Maslennikov O.V.***, *Perc M., Nekorkin V.I.* Topological features of spike trains in recurrent spiking neural networks that are trained to generate spatiotemporal patterns // Frontiers in Computational Neuroscience. – 2024. – Vol. 18. – P. 1363514.

[A21] ***Масленников О.В.***, *Пугавко М.М., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейная динамика и машинное обучение рекуррентных спайковых нейронных сетей // Успехи физических наук. – 2022. – Т. 192. – С. 1089–1109.

[A22] *Пугавко М.М.,* ***Масленников О.В.***, *Некоркин В.И.* Динамика рекуррентной спайковой нейронной сети в задаче двухальтернативного выбора // Известия вузов. Радиофизика. – 2021. – Т. 64, № 10. – Р. 817–832.

[A23] *Кононов Р.А.,* ***Масленников О.В.***, *Некоркин В.И.* Динамика рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации в задаче контекстно-зависимого принятия решения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2025. – Т. 33, № 2. – С. 249–265.

[A24] ***Масленников О.В.*** Динамика искусственной рекуррентной нейронной сети в задаче моделирования когнитивной функции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29, № 5. – С. 799–811.

[A25] *Klinshov V.V., Kovalchuk A.V., Soloviev I.A.,* ***Maslennikov O.V.***, *Franović I., Perc M.* Extending dynamic memory of spiking neuron networks // Chaos, Solitons & Fractals. – 2024. – Vol. 182. – P. 114850.

[A26] *Kononov R.A., Tiselko V.A.,* ***Maslennikov O.V.***, *Nekorkin V.I.* Population

coding and self-organized ring attractors in recurrent neural networks for continuous variable integration // Frontiers in Network Physiology. – 2025. – Vol. 5. – P. 1693772.

[A27] *Pugavko M.M.,* ***Maslennikov O.V.,*** *Nekorkin V.I.* Multitask computation through dynamics in recurrent spiking neural networks // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13, № 1. – P. 3997.

[A28] *Ivanov D.A., Larionov D.A.,* ***Maslennikov O.V.,*** *Voevodin V.V.* Neural network compression for reinforcement learning tasks // Scientific Reports. – 2025. – Vol. 15, № 1. – P. 9718.

[A29] ***Maslennikov O.V.*** Topological and geometrical signatures of computation in rate, spiking, and oscillatory neural reservoirs // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2025. – Vol. 35, № 12. – P. 121106.

[A30] *Goryunov O.A.,* ***Maslennikov O.V.,*** *Kiselev M.V., Franović I., Klinshov V.V.* Understanding the training dynamics of CoLaNET by its simplified model // Chaos, Solitons & Fractals. – 2026. – Vol. 203. – P. 117663.

[A31] ***Maslennikov O.V.*** Geometry and efficiency of learned and reservoir recurrent dynamics in context-dependent integration–switching // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2026. – Vol. 36, № 1. – P. 012345.

[A32] ***Maslennikov O.V.***, *Shchapin D.S.*, *Nekorkin V.I.* Classification via forced spatiotemporal dynamics: an electronic FitzHugh–Nagumo chain as a physical kernel // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2026. – Vol. 22, № 2. – https://doi.org/10.20537/nd260305.

Прочие источники

1. *Hodgkin A. L.*, *Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // The Journal of physiology. — 1952. — Т. 117, № 4. — С. 500.
2. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical journal. — 1961. — Т. 1, № 6. — С. 445—466.
3. *Rinzel J.*, *Ermentrout G. B.* Analysis of neural excitability and oscillations // Methods in neuronal modeling. — 1998. — Т. 2, № 1998. — С. 251—292.
4. *Izhikevich E. M.* Dynamical systems in neuroscience. — MIT press, 2007.
5. *Ermentrout B.*, *Terman D. M.* Mathematical foundations of neuroscience. Т. 35. — Springer, 2010.
6. Synchronization in complex networks / A. Arenas [и др.] // Physics Reports. — 2008. — Т. 469, № 3. — С. 93—153.
7. *Watts D. J.*, *Strogatz S. H.* Collective dynamics of ‘small-world’networks // Nature. — 1998. — Т. 393, № 6684. — С. 440—442.
8. *Strogatz S. H.* Exploring complex networks // Nature. — 2001. — Т. 410, № 6825. — С. 268—276.
9. *Nekorkin V. I.*, *Velarde M. G.* Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos. — Springer, 2002.
10. Dynamical principles in neuroscience / M. I. Rabinovich [и др.] // Reviews of modern physics. — 2006. — Т. 78, № 4. — С. 1213—1265.
11. *Rabinovich M.*, *Huerta R.*, *Laurent G.* Transient dynamics for neural processing // Science. — 2008. — Т. 321, № 5885. — С. 48—50.

12. *Sompolinsky H.*, *Crisanti A.*, *Sommers H.-J.* Chaos in random neural networks // Physical Review Letters. — 1988. — Т. 61, № 3. — С. 259—262.

13. *Hopfield J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. // Proceedings of the national academy of sciences. — 1982. — Т. 79, № 8. — С. 2554—2558.

14. *Amit D. J.*, *Gutfreund H.*, *Sompolinsky H.* Storing infinite numbers of patterns in a spin-glass model of neural networks // Physical review letters. — 1985. — Т. 55, № 14. — С. 1530.

15. *Rajan K.*, *Abbott L. F.* Eigenvalue spectra of random matrices for neural networks // Physical Review Letters. — 2006. — Т. 97, № 18. — С. 188104.

16. *Rumelhart D. E.*, *Hinton G. E.*, *Williams R. J.* Learning representations by back-propagating errors // Nature. — 1986. — Т. 323, № 6088. — С. 533—536.

17. *Sutton R. S.*, *Barto A. G.* Reinforcement Learning: An Introduction. — 2-е изд. — MIT Press, 2018.

18. *Song H. F.*, *Yang G. R.*, *Wang X.-J.* Reward-based training of recurrent neural networks for cognitive and value-based tasks // eLife. — 2017. — Т. 6. — e21492.

19. *Jaeger H.* The “echo state” approach to analysing and training recurrent neural networks : GMD Report / German National Research Center for Information Technology. — 2001. — № 148.

20. *Maass W.*, *Natschläger T.*, *Markram H.* Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations // Neural Computation. — 2002. — Т. 14, № 11. — С. 2531—2560.

21. *Sussillo D.*, *Abbott L. F.* Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks // Neuron. — 2009. — Т. 63, № 4. — С. 544—557.

22. *Lukoševičius M.*, *Jaeger H.* Reservoir computing approaches to recurrent neural network training // Computer Science Review. — 2009. — Т. 3, № 3. — С. 127—149.

23. *The Royal Swedish Academy of Sciences*. The Nobel Prize in Physics 2024: John J. Hopfield and Geoffrey E. Hinton. — 2024. — https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2024/summary/.

24. Context-dependent computation by recurrent dynamics in prefrontal cortex / V. Mante [и др.] // Nature. — 2013. — Т. 503, № 7474. — С. 78—84.

25. Task representations in neural networks trained to perform many cognitive tasks / G. R. Yang [и др.] // Nature Neuroscience. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 297—306.

26. *Sussillo D.*, *Barak O.* Opening the black box: low-dimensional dynamics in high-dimensional recurrent neural networks // Neural computation. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 626—649.

27. *Barak O.* Recurrent neural networks as versatile tools of neuroscience research // Current opinion in neurobiology. — 2017. — Т. 46. — С. 1—6.

28. Computation through neural population dynamics / S. Vyas [и др.] // Annual Review of Neuroscience. — 2020. — Т. 43. — С. 249—275.

29. *Wang X.-J.* Probabilistic decision making by slow reverberation in cortical circuits // Neuron. — 2002. — Т. 36, № 5. — С. 955—968.

30. *Gold J. I.*, *Shadlen M. N.* The neural basis of decision making // Annual Review of Neuroscience. — 2007. — Т. 30. — С. 535—574.

31. *Burak Y.*, *Fiete I. R.* Accurate path integration in continuous attractor network models of grid cells // PLoS Computational Biology. — 2009. — Т. 5, № 2. — e1000291.

32. Ring attractor dynamics in the *Drosophila* central brain / S. S. Kim [и др.] // Science. — 2017. — Т. 356, № 6340. — С. 849—853.

33. A deep learning framework for neuroscience / B. A. Richards [и др.] // Nature Neuroscience. — 2019. — Т. 22, № 11. — С. 1761—1770.

34. *Некоркин В. И.*, *Вдовин Л. В.* Дискретная модель нейронной активности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2007. — Т. 15, № 5. — С. 36—60.

35. *Courbage M.*, *Nekorkin V. I.*, *Vdovin L. V.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2007. — Т. 17, № 4.

36. *Courbage M.*, *Nekorkin V. I.* Map based models in neurodynamics // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2010. — Т. 20, № 06. — С. 1631—1651.

37. *Nagumo J.*, *Arimoto S.*, *Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proceedings of the IRE. — 1962. — Т. 50. — С. 2061—2070.

38. *Afraimovich V.*, *Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. Т. 28. — American Mathematical Society Providence, 2003.

39. *Lapicque L.* Recherches quantitatives sur l'excitation electrique des nerfs traitee comme une polarization // Journal de physiologie et de pathologie générale. — 1907. — Т. 9. — С. 620—635.

40. *Dayan P.*, *Abbott L. F.* Theoretical Neuroscience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems. — MIT Press, 2005.

41. *Brette R.*, *Gerstner W.* Adaptive exponential integrate-and-fire model as an effective description of neuronal activity // Journal of Neurophysiology. — 2005. — Т. 94, № 5. — С. 3637—3642.

42. Firing patterns in the adaptive exponential integrate-and-fire model / R. Naud [и др.] // Biological Cybernetics. — 2008. — Т. 99, № 4. — С. 335—347.

43. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. — Springer, 1984.

44. *Kuznetsov Y. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. — 3rd. — Springer, 2004.

45. *Pikovsky A.*, *Rosenblum M.*, *Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. — Cambridge University Press, 2001.

46. *Wilson H. R.*, *Cowan J. D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // Biophysical journal. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 1—24.

47. Learning phrase representations using RNN encoder–decoder for statistical machine translation / K. Cho [и др.] // Proceedings of the 2014 conference on empirical methods in natural language processing (EMNLP). — 2014. — С. 1724—1734.

48. *Hochreiter S.*, *Schmidhuber J.* Long short-term memory // Neural Computation. — 1997. — Т. 9, № 8. — С. 1735—1780.

49. How basin stability complements the linear-stability paradigm / P. J. Menck [и др.] // Nature physics. — 2013. — Т. 9, № 2. — С. 89—92.

50. Mixed-mode oscillations with multiple time scales / M. Desroches [и др.] // Siam Review. — 2012. — Т. 54, № 2. — С. 211—288.

51. *Guckenheimer J.*, *Wechselberger M.*, *Young L.-S.* Chaotic attractors of relaxation oscillators // Nonlinearity. — 2006. — Т. 19, № 3. — С. 701—720.

52. *Shilnikov A.*, *Kolomiets M.* Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study–a tutorial // International Journal of Bifurcation and chaos. — 2008. — Т. 18, № 08. — С. 2141—2168.

53. *Mira C.* Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. Т. 20. — World Scientific, 1996.

54. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory / G. Benettin [и др.] // Meccanica. — 1980. — Т. 15, № 1. — С. 9—20.

55. *Lai Y.-C.*, *Tél T.* Transient chaos: complex dynamics on finite time scales. Т. 173. — Springer Science & Business Media, 2011.

56. *Tél T.* The joy of transient chaos // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2015. — Т. 25, № 9.

57. *Dangoisse D.*, *Glorieux P.*, *Hennequin D.* Chaotic phenomena in a CO2 laser with internal modulation // Optical Chaos. Т. 667. — SPIE. 1986. — С. 242—247.

58. *Schwartz I. B.*, *Triandaf I.* Sustaining chaos by using basin boundary saddles // Physical review letters. — 1996. — Т. 77, № 23. — С. 4740.

59. *Ghil M.*, *Chekroun M. D.*, *Simonnet E.* Climate dynamics and fluid mechanics: Natural variability and related uncertainties // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2008. — Т. 237, № 14—17. — С. 2111—2126.

60. *Chekroun M. D.*, *Simonnet E.*, *Ghil M.* Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures // Physica D: Nonlinear Phenomena. - 2011. — T. 240, № 21. — C. 1685—1700.

61. *Mccann K.*, *Yodzis P.* Bifurcation structure of a three-species food-chain model // Theoretical population biology. — 1995. — T. 48, № 2. — C. 93—125.

62. *Ellner S.*, *Turchin P.* When can noise induce chaos and why does it matter: a critique // Oikos. — 2005. — T. 111, № 3. — C. 620—631.

63. *Dhamala M.*, *Lai Y.-C.* Controlling transient chaos in deterministic flows with applications to electrical power systems and ecology // Physical Review E. — 1999. — T. 59, № 2. — C. 1646.

64. *Wang H. O.*, *Abed E. H.* Bifurcation control of a chaotic system // Automatica. — 1995. — T. 31, № 9. — C. 1213—1226.

65. *Goldberger A. L.* Nonlinear dynamics, fractals and chaos: applications to cardiac electrophysiology // Annals of biomedical engineering. — 1990. — T. 18, № 2. — C. 195—198.

66. Controlling chaos in the brain / S. J. Schiff [и др.] // Nature. — 1994. — T. 370, № 6491. — C. 615—620.

67. *McKenna T.*, *McMullen T.*, *Shlesinger M.* The brain as a dynamic physical system // Neuroscience. — 1994. — T. 60, № 3. — C. 587—605.

68. *Rand D.* The topological classification of Lorenz attractors // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. T. 83. — Cambridge University Press. 1978. — C. 451—460.

69. *Maslennikov O. V.*, *Nekorkin V. I.* Dynamic boundary crisis in the Lorenz-type map // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2013. — T. 23, № 2.

70. *Deco G.*, *Jirsa V.*, *Friston K. J.* The dynamical structural basis of brain activity // Principles of brain dynamics: Global state interactions. — 2012. — T. 1.

71. *Diesmann M.*, *Gewaltig M.-O.*, *Aertsen A.* Stable propagation of synchronous spiking in cortical neural networks // Nature. — 1999. — T. 402, № 6761. — C. 529—533.

72. *Gross T.*, *Blasius B.* Adaptive coevolutionary networks: a review // Journal of the Royal Society Interface. — 2008. — T. 5, № 20. — C. 259—271.

73. *Gorochowski T. E.*, *Bernardo M. D.*, *Grierson C. S.* Evolving dynamical networks: a formalism for describing complex systems // Complexity. — 2012. — T. 17, № 3. — C. 18—25.

74. *Rabinovich M. I.*, *Friston K. J.*, *Varona P.* Principles of brain dynamics: global state interactions. — MIT Press, 2023.

75. *Neiman A. B.*, *Russell D. F.* Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons // Physical review letters. — 2002. — T. 88, № 13. — C. 138103.

76. *Belykh I.*, *De Lange E.*, *Hasler M.* Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology // Physical review letters. — 2005. — T. 94, № 18. — C. 188101.

77. *Rulkov N. F.* Regularization of synchronized chaotic bursts // Physical Review Letters. — 2001. — T. 86, № 1. — C. 183.

78. *Osipov G. V.*, *Kurths J.*, *Zhou C.* Synchronization in oscillatory networks. — Springer, 2007.

79. *Wiley D. A.*, *Strogatz S. H.*, *Girvan M.* The size of the sync basin // Chaos. — 2006. — T. 16, № 1. — C. 015103.

80. *Stam C. J.*, *Reijneveld J. C.* Graph theoretical analysis of complex networks in the brain // Nonlinear Biomedical Physics. — 2007. — T. 1, № 3.

81. *Bullmore E.*, *Sporns O.* Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems // Nature Reviews Neuroscience. — 2009. — T. 10. — C. 186—198.

82. Mapping anatomical connectivity patterns of human cerebral cortex using in vivo diffusion tensor imaging tractography / G. Gong [и др.] // Cerebral Cortex. — 2009. — T. 19, № 3. — C. 524—536.

83. Phase synchronization of bursting neurons in small-world networks / C. A. S. Batista [и др.] // Physical Review E. — 2012. — T. 86, № 1. — C. 016211.

84. *Dhamala M.*, *Jirsa V. K.*, *Ding M.* Transitions to synchrony in coupled bursting neurons // Physical Review Letters. — 2004. — T. 92, № 2. — C. 028101.

85. *Shen Y.*, *Hou Z.*, *Xin H.* Transition to burst synchronization in coupled neuron networks // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2008. — T. 77, № 3. — C. 031920.

86. *Barabási A.-L.*, *Albert R.* Emergence of scaling in random networks // Science. — 1999. — T. 286, № 5439. — C. 509—512.

87. Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness / G. Caldarelli [и др.] // Physical review letters. — 2002. — T. 89, № 25. — C. 258702.

88. *Garlaschelli D.*, *Capocci A.*, *Caldarelli G.* Self-organized network evolution coupled to extremal dynamics // Nature Physics. — 2007. — T. 3, № 11. — C. 813—817.

89. Modeling complex systems with adaptive networks / H. Sayama [и др.] // Computers & Mathematics with Applications. — 2013. — Т. 65, № 10. — С. 1645—1664.

90. Evolving dynamical networks / I. Belykh [и др.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2014. — Т. 267. — С. 1—6.

91. *Aoki T.*, *Aoyagi T.* Co-evolution of phases and connection strengths in a network of phase oscillators // Physical review letters. — 2009. — Т. 102, № 3. — С. 034101.

92. Emerging meso-and macroscales from synchronization of adaptive networks / R. Gutiérrez [и др.] // Physical review letters. — 2011. — Т. 107, № 23. — С. 234103.

93. Emergence of structural patterns out of synchronization in networks with competitive interactions / S. Assenza [и др.] // Scientific reports. — 2011. — Т. 1, № 1. — С. 99.

94. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings / D. Kasatkin [и др.] // Physical Review E. — 2017. — Т. 96, № 6. — С. 062211.

95. Dynamic functional connectivity: promise, issues, and interpretations / R. M. Hutchison [и др.] // Neuroimage. — 2013. — Т. 80. — С. 360—378.

96. *Petersen S. E.*, *Sporns O.* Brain networks and cognitive architectures // Neuron. — 2015. — Т. 88, № 1. — С. 207—219.

97. *Mišić B.*, *Sporns O.* From regions to connections and networks: new bridges between brain and behavior // Current opinion in neurobiology. — 2016. — Т. 40. — С. 1—7.

98. *Tononi G.*, *Edelman G. M.* Consciousness and complexity // science. — 1998. — T. 282, № 5395. — C. 1846—1851.

99. The brainweb: phase synchronization and large-scale integration / F. Varela [и др.] // Nature reviews neuroscience. — 2001. — T. 2, № 4. — C. 229—239.

100. *Edelman G. M.* Naturalizing consciousness: a theoretical framework // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2003. — T. 100, № 9. — C. 5520—5524.

101. *Buonomano D. V.*, *Maass W.* State-dependent computations: spatiotemporal processing in cortical networks // Nature Reviews Neuroscience. — 2009. — T. 10, № 2. — C. 113—125.

102. *Buzsáki G.* Neural syntax: cell assemblies, synapsembles, and readers // Neuron. — 2010. — T. 68, № 3. — C. 362—385.

103. The importance of mixed selectivity in complex cognitive tasks / M. Rigotti [и др.] // Nature. — 2013. — T. 497, № 7451. — C. 585—590.

104. *Afraimovich V. S.*, *Zhigulin V.*, *Rabinovich M. I.* On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2004. — T. 14, № 4. — C. 1123—1129.

105. Winnerless competition principle and prediction of the transient dynamics in a Lotka–Volterra model / V. Afraimovich [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2008. — T. 18, № 4.

106. *Afraimovich V. S.*, *Young T. R.*, *Rabinovich M. I.* Hierarchical heteroclinics in dynamical model of cognitive processes: chunking // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — T. 24, № 10. — C. 1450132.

107. *Nekorkin V.*, *Makarov V.* Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators // Physical review letters. — 1995. — Т. 74, № 24. — С. 4819—4822.

108. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states / I. Omelchenko [и др.] // Physical review letters. — 2011. — Т. 106, № 23. — С. 234102.

109. *Holme P.*, *Saramäki J.* Temporal networks // Physics reports. — 2012. — Т. 519, № 3. — С. 97—125.

110. Mathematical formulation of multilayer networks / M. De Domenico [и др.] // Physical Review X. — 2013. — Т. 3, № 4. — С. 041022.

111. The structure and dynamics of multilayer networks / S. Boccaletti [и др.] // Physics reports. — 2014. — Т. 544, № 1. — С. 1—122.

112. Multilayer networks / M. Kivelä [и др.] // Journal of complex networks. — 2014. — Т. 2, № 3. — С. 203—271.

113. *Johnson J.* Hypernetworks in the science of complex systems. Т. 3. — World Scientific, 2013.

114. *Johnson J. H.* Hypernetworks: multidimensional relationships in multilevel systems // The European Physical Journal Special Topics. — 2016. — Т. 225, № 6. — С. 1037—1052.

115. The physics of spreading processes in multilayer networks / M. De Domenico [и др.] // Nature Physics. — 2016. — Т. 12, № 10. — С. 901—906.

116. *Bassett D. S.*, *Sporns O.* Network neuroscience // Nature neuroscience. — 2017. — Т. 20, № 3. — С. 353—364.

117. *Koseska A.*, *Volkov E.*, *Kurths J.* Transition from amplitude to oscillation death via Turing bifurcation // Physical review letters. — 2013. — Т. 111, № 2. — С. 024103.

118. *Gambuzza L. V.*, *Gómez-Gardeñes J.*, *Frasca M.* Amplitude dynamics favors synchronization in complex networks // Scientific reports. — 2016. — Т. 6, № 1. — С. 24915.

119. *Zakharova A.*, *Kapeller M.*, *Schöll E.* Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks // Physical review letters. — 2014. — Т. 112, № 15. — С. 154101.

120. *Bordyugov G.*, *Pikovsky A.*, *Rosenblum M.* Self-emerging and turbulent chimeras in oscillator chains // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2010. — Т. 82, № 3. — С. 035205.

121. Quenching, aging, and reviving in coupled dynamical networks / W. Zou [и др.] // Physics Reports. — 2021. — Т. 931. — С. 1—72.

122. Phase-amplitude descriptions of neural oscillator models / K. C. Wedgwood [и др.] // The Journal of Mathematical Neuroscience. — 2013. — Т. 3, № 1. — С. 2.

123. Remote synchronization in star networks / A. Bergner [и др.] // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2012. — Т. 85, № 2. — С. 026208.

124. Analysis of remote synchronization in complex networks / L. V. Gambuzza [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2013. — Т. 23, № 4.

125. Explosive synchronization transitions in scale-free networks / J. Gómez-Gardenes [и др.] // Physical review letters. — 2011. — Т. 106, № 12. — С. 128701.

126. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators / I. Leyva [и др.] // Physical review letters. — 2012. — Т. 108, № 16. — С. 168702.

127. *Kasatkin D.*, *Nekorkin V.* Synchronization of chimera states in a multiplex system of phase oscillators with adaptive couplings // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — Т. 28, № 9.

128. Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators / V. Makarov [и др.] // Chaos, Solitons & Fractals. — 2016. — Т. 84. — С. 23—30.

129. *Gambuzza L. V.*, *Frasca M.*, *Gomez-Gardenes J.* Intra-layer synchronization in multiplex networks // Europhysics Letters. — 2015. — Т. 110, № 2. — С. 20010.

130. Collective phenomena emerging from the interactions between dynamical processes in multiplex networks / V. Nicosia [и др.] // Physical review letters. — 2017. — Т. 118, № 13. — С. 138302.

131. *Watts D. J.* Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness. — Princeton university press, 1999.

132. *Josić K.*, *Mar D. J.* Phase synchronization of chaotic systems with small phase diffusion // Physical Review E. — 2001. — Т. 64, № 5. — С. 056234.

133. *Pereira T.*, *Baptista M.*, *Kurths J.* Phase and average period of chaotic oscillators // Physics Letters A. — 2007. — Т. 362, № 2/3. — С. 159—165.

134. *Nekorkin V.*, *Maslennikov O.* Spike-burst synchronization in an ensemble of electrically coupled discrete model neurons // Radiophysics and Quantum Electronics. - 2011. — T. 54, № 1. — C. 56—73.

135. *Courbage M.*, *Maslennikov O.*, *Nekorkin V.* Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons // Chaos, Solitons & Fractals. — 2012. — T. 45, № 5. — C. 645—659.

136. *Maslennikov O. V.*, *Nekorkin V. I.* Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control // Physical Review E. — 2014. — T. 90, № 1. — C. 012901.

137. *Gómez-Gardeñes J.*, *Moreno Y.* From scale-free to Erdos-Rényi networks // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2006. — T. 73, № 5. — C. 056124.

138. *Destexhe A.*, *Marder E.* Plasticity in single neuron and circuit computations // Nature. — 2004. — T. 431, № 7010. — C. 789—795.

139. *Tzounopoulos T.*, *Kraus N.* Learning to encode timing: mechanisms of plasticity in the auditory brainstem // Neuron. — 2009. — T. 62, № 4. — C. 463—469.

140. *Bell C. C.*, *Han V.*, *Sawtell N. B.* Cerebellum-like structures and their implications for cerebellar function // Annu. Rev. Neurosci. — 2008. — T. 31, № 1. — C. 1—24.

141. *Horn R. A.*, *Johnson C. R.* Matrix analysis. — Cambridge university press, 2012.

142. *Jaeger H.*, *Haas H.* Harnessing nonlinearity: Predicting chaotic systems and saving energy in wireless communication // Science. — 2004. — T. 304, № 5667. — C. 78—80.

143. Reservoir observers: Model-free inference of unmeasured variables in chaotic systems / Z. Lu [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2017. — Т. 27, № 4.

144. Model-free prediction of large spatiotemporally chaotic systems from data: A reservoir computing approach / J. Pathak [и др.] // Physical review letters. — 2018. — Т. 120, № 2. — С. 024102.

145. Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate Lyapunov exponents from data / J. Pathak [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2017. — Т. 27, № 12.

146. *Canaday D.*, *Griffith A.*, *Gauthier D. J.* Rapid time series prediction with a hardware-based reservoir computer // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — Т. 28, № 12.

147. Backpropagation algorithms and reservoir computing in recurrent neural networks for the forecasting of complex spatiotemporal dynamics / P.-R. Vlachas [и др.] // Neural Networks. — 2020. — Т. 126. — С. 191—217.

148. *Griffith A.*, *Pomerance A.*, *Gauthier D. J.* Forecasting chaotic systems with very low connectivity reservoir computers // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Т. 29, № 12.

149. Recent advances in physical reservoir computing: A review / G. Tanaka [и др.] // Neural Networks. — 2019. — Т. 115. — С. 100—123.

150. Forecasting macroscopic dynamics in adaptive Kuramoto network using reservoir computing / A. V. Andreev [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2022. — Т. 32, № 10.

151. *Masoliver M.*, *Davidsen J.*, *Nicola W.* Embedded chimera states in recurrent neural networks // Communications Physics. — 2022. — Т. 5, № 1. — С. 205.

152. Generative models of brain dynamics / M. Ramezanian-Panahi [и др.] // Frontiers in artificial intelligence. — 2022. — Т. 5. — С. 807406.

153. *Sussillo D.* Neural circuits as computational dynamical systems // Current Opinion in Neurobiology. — 2014. — Т. 25. — С. 156—163.

154. *Abbott L. F.*, *DePasquale B.*, *Memmesheimer R.-M.* Building functional networks of spiking model neurons // Nature neuroscience. — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 350—355.

155. *Nicola W.*, *Clopath C.* Supervised learning in spiking neural networks with FORCE training // Nature communications. — 2017. — Т. 8, № 1. — С. 2208.

156. Role of graph architecture in controlling dynamical networks with applications to neural systems / J. Z. Kim [и др.] // Nature physics. — 2018. — Т. 14, № 1. — С. 91—98.

157. full-FORCE: A target-based method for training recurrent networks / B. DePasquale [и др.] // PloS one. — 2018. — Т. 13, № 2. — e0191527.

158. *Schrauwen B.*, *Verstraeten D.*, *Van Campenhout J.* An overview of reservoir computing: theory, applications and implementations // Proceedings of the 15th European Symposium on Artificial Neural Networks, ESANN 2007. — 2007. — С. 471—482.

159. *Lukoševičius M.* A practical guide to applying echo state networks // Neural Networks: Tricks of the Trade. — Springer, 2012. — С. 659—686.

160. *Benaych-Georges F.*, *Nadakuditi R. R.* The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices // Advances in Mathematics. — 2011. — Т. 227, № 1. — С. 494—521.

161. Dynamics of random recurrent networks with correlated low-rank structure / F. Schuessler [и др.] // Physical Review Research. — 2020. — Т. 2, № 1. — С. 013111.

162. *Haykin S. S.* Adaptive filter theory. — Pearson Education India, 2008.

163. *Haken H.* Synergetics. An Introduction. Nonequilibrium Phase Trasitions and Self-organization in Physics, Chemistry, and Biology. — Berlin, 1983.

164. Controlling cluster synchronization by adapting the topology / J. Lehnert [и др.] // Physical Review E. — 2014. — Т. 90, № 4. — С. 042914.

165. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena / J. A. Acebrón [и др.] // Reviews of modern physics. — 2005. — Т. 77, № 1. — С. 137—185.

166. The Kuramoto model in complex networks / F. A. Rodrigues [и др.] // Physics Reports. — 2016. — Т. 610. — С. 1—98.

167. *Tao T.* Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations // Probability Theory and Related Fields. — 2013. — Т. 155, № 1. — С. 231—263.

168. *Luczak A.*, *McNaughton B. L.*, *Harris K. D.* Packet-based communication in the cortex // Nature Reviews Neuroscience. — 2015. — Т. 16, № 12. — С. 745—755.

169. *Rivkind A.*, *Barak O.* Local dynamics in trained recurrent neural networks // Physical review letters. — 2017. — Т. 118, № 25. — С. 258101.

170. *Rajan K.*, *Abbott L.*, *Sompolinsky H.* Stimulus-dependent suppression of chaos in recurrent neural networks // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2010. — Т. 82, № 1. — С. 011903.

171. *Laje R.*, *Buonomano D. V.* Robust timing and motor patterns by taming chaos in recurrent neural networks // Nature neuroscience. — 2013. — Т. 16, № 7. — С. 925—933.

172. *Mastrogiuseppe F.*, *Ostojic S.* Linking connectivity, dynamics, and computations in low-rank recurrent neural networks // Neuron. — 2018. — Т. 99, № 3. — С. 609—623.

173. *Rajan K.*, *Harvey C. D.*, *Tank D. W.* Recurrent network models of sequence generation and memory // Neuron. — 2016. — Т. 90, № 1. — С. 128—142.

174. *Abrams D. M.*, *Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // Physical review letters. — 2004. — Т. 93, № 17. — С. 174102.

175. *Kasatkin D. V.*, *Klinshov V. V.*, *Nekorkin V. I.* Itinerant chimeras in an adaptive network of pulse-coupled oscillators // Physical Review E. — 2019. — Т. 99, № 2. — С. 022203.

176. Invariant visual representation by single neurons in the human brain / R. Q. Quiroga [и др.] // Nature. — 2005. — Т. 435, № 7045. — С. 1102—1107.

177. *Edelsbrunner H.*, *Harer J.* Computational topology: an introduction. — American Mathematical Soc., 2010.

178. *Gowdridge T.*, *Dervilis N.*, *Worden K.* On topological data analysis for structural dynamics: an introduction to persistent homology // ASME Open Journal of Engineering. — 2022. — Т. 1.

179. Perslay: A neural network layer for persistence diagrams and new graph topological signatures / M. Carrière [и др.] // International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. — PMLR. 2020. — С. 2786—2796.

180. Toroidal topology of population activity in grid cells / R. J. Gardner [и др.] // Nature. — 2022. — Т. 602, № 7895. — С. 123—128.

181. An experimental unification of reservoir computing methods / D. Verstraeten [и др.] // Neural networks. — 2007. — Т. 20, № 3. — С. 391—403.

182. *Kawai Y.*, *Park J.*, *Asada M.* Reservoir computing using self-sustained oscillations in a locally connected neural network // Scientific Reports. — 2023. — Т. 13, № 1. — С. 15532.

183. *Chiba H.*, *Taniguchi K.*, *Sumi T.* Reservoir computing with the Kuramoto model // arXiv preprint arXiv:2407.16172. — 2024.

184. Artificial kuramoto oscillatory neurons / T. Miyato [и др.] // arXiv preprint arXiv:2410.13821. — 2024.

185. *Rodan A.*, *Tino P.* Minimum complexity echo state network // IEEE transactions on neural networks. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 131—144.

186. *Victor J. D.*, *Purpura K. P.* Nature and precision of temporal coding in visual cortex: a metric-space analysis // Journal of neurophysiology. — 1996. — Т. 76, № 2. — С. 1310—1326.

187. Phase detection with neural networks: interpreting the black box / A. Dawid [и др.] // New Journal of Physics. — 2020. — Т. 22, № 11. — С. 115001.

188. Quantum phase detection generalization from marginal quantum neural network models / S. Monaco [и др.] // Physical Review B. — 2023. — Т. 107, № 8. — С. L081105.

189. *Fawcett T.* An introduction to ROC analysis // Pattern recognition letters. — 2006. — Т. 27, № 8. — С. 861—874.

190. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // Dynamical Systems and Turbulence. — Springer. 1981. — С. 366—381.

191. Photonic information processing beyond Turing: an optoelectronic implementation of reservoir computing / L. Larger [и др.] // Optics express. — 2012. — Т. 20, № 3. — С. 3241—3249.

192. Information processing using a single dynamical node as complex system / L. Appeltant [и др.] // Nature communications. — 2011. — Т. 2, № 1. — С. 468.

193. *Sung C.*, *Hwang H.*, *Yoo I. K.* Perspective: A review on memristive hardware for neuromorphic computation // Journal of Applied Physics. — 2018. — Т. 124, № 15.

194. Artificial electrical Morris–Lecar neuron / R. Behdad [и др.] // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. — 2014. — Т. 26, № 9. — С. 1875—1884.

195. *Cortes C.*, *Vapnik V.* Support-vector networks // Machine learning. — 1995. — Т. 20, № 3. — С. 273—297.

196. *Schölkopf B.*, *Smola A. J.* Learning with kernels: support vector machines, regularization, optimization, and beyond. — MIT press, 2002.

197. *Shchapin D.* Dynamics of two neuronlike elements with inhibitory feedback // Journal of Communications Technology and Electronics. — 2009. — Т. 54, № 2. — С. 175—184.

198. *Welch P.* The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms // IEEE

Transactions on audio and electroacoustics. — 1967. — Т. 15, № 2. — С. 70—73.

199. *Caponnetto A.*, *De Vito E.* Optimal rates for the regularized least-squares algorithm // Foundations of Computational mathematics. — 2007. — Т. 7, № 3. — С. 331—368.

200. *Cortes C.*, *Mohri M.*, *Rostamizadeh A.* Algorithms for learning kernels based on centered alignment // The Journal of Machine Learning Research. — 2012. — Т. 13. — С. 795—828.

201. *Grigoryeva L.*, *Ortega J.-P.* Echo state networks are universal // Neural Networks. — 2018. — Т. 108. — С. 495—508.

202. *Nakajima K.* Physical reservoir computing—an introductory perspective // Japanese Journal of Applied Physics. — 2020. — Т. 59, № 6. — С. 060501.

203. *Legenstein R.*, *Maass W.* Edge of chaos and prediction of computational performance for neural circuit models // Neural networks. — 2007. — Т. 20, № 3. — С. 323—334.

204. Next generation reservoir computing / D. J. Gauthier [и др.] // Nature communications. — 2021. — Т. 12, № 1. — С. 5564.

205. Constructing neural network based models for simulating dynamical systems / C. Legaard [и др.] // ACM Computing Surveys. — 2023. — Т. 55, № 11. — С. 1—34.

206. *Durstewitz D.*, *Koppe G.*, *Thurm M. I.* Reconstructing computational system dynamics from neural data with recurrent neural networks // Nature Reviews Neuroscience. — 2023. — Т. 24, № 11. — С. 693—710.

207. *Cunningham J. P.*, *Yu B. M.* Dimensionality reduction for large-scale neural recordings // Nature neuroscience. — 2014. — Т. 17, № 11. — С. 1500—1509.

208. *Low I. I.*, *Giocomo L. M.*, *Williams A. H.* Remapping in a recurrent neural network model of navigation and context inference // Elife. — 2023. — Т. 12. — RP86943.

209. Flexible sensorimotor computations through rapid reconfiguration of cortical dynamics / E. D. Remington [и др.] // Neuron. — 2018. — Т. 98, № 5. — С. 1005—1019.

210. *Yildiz I. B.*, *Jaeger H.*, *Kiebel S. J.* Re-visiting the echo state property // Neural networks. — 2012. — Т. 35. — С. 1—9.

211. *McInnes L.*, *Healy J.*, *Melville J.* Umap: Uniform manifold approximation and projection for dimension reduction // arXiv preprint arXiv:1802.03426. — 2018.

212. *Anderson P. W.* More is different: broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science. // Science. — 1972. — Т. 177, № 4047. — С. 393—396.

213. Demixed principal component analysis of neural population data / D. Kobak [и др.] // elife. — 2016. — Т. 5. — e10989.

214. *Machens C. K.*, *Romo R.*, *Brody C. D.* Flexible control of mutual inhibition: a neural model of two-interval discrimination // Science. — 2005. — Т. 307, № 5712. — С. 1121—1124.

215. *Hertäg L.*, *Durstewitz D.*, *Brunel N.* Analytical approximations of the firing rate of an adaptive exponential integrate-and-fire neuron in the presence of

synaptic noise // Frontiers in computational neuroscience. — 2014. — Т. 8. — С. 116.

216. Identifying nonlinear dynamical systems via generative recurrent neural networks with applications to fMRI / G. Koppe [и др.] // PLoS computational biology. — 2019. — Т. 15, № 8. — e1007263.

217. *Kingma D. P.*, *Ba J.* Adam: A method for stochastic optimization // International Conference on Learning Representations (ICLR). — 2015.

218. *Keemink S. W.*, *Machens C. K.* Decoding and encoding (de) mixed population responses // Current Opinion in Neurobiology. — 2019. — Т. 58. — С. 112—121.

219. A solution to the learning dilemma for recurrent networks of spiking neurons / G. Bellec [и др.] // Nature communications. — 2020. — Т. 11, № 1. — С. 3625.

220. *Khona M.*, *Fiete I. R.* Attractor and integrator networks in the brain // Nature Reviews Neuroscience. — 2022. — Т. 23, № 12. — С. 744—766.

221. *Seeholzer A.*, *Deger M.*, *Gerstner W.* Stability of working memory in continuous attractor networks under the control of short-term plasticity // PLoS computational biology. — 2019. — Т. 15, № 4. — e1006928.

222. *Zhang K.* Representation of spatial orientation by the intrinsic dynamics of the head-direction cell ensemble: a theory // Journal of Neuroscience. — 1996. — Т. 16, № 6. — С. 2112—2126.

223. A model of the neural basis of the rat's sense of direction / W. Skaggs [и др.] // Advances in neural information processing systems. — 1994. — Т. 7.

224. *Moser E. I.*, *Kropff E.*, *Moser M.-B.* Place cells, grid cells, and the brain's spatial representation system // Annu. Rev. Neurosci. — 2008. — Т. 31, № 1. — С. 69—89.

225. Path integration and the neural basis of the 'cognitive map' / B. L. McNaughton [и др.] // Nature Reviews Neuroscience. — 2006. — Т. 7, № 8. — С. 663—678.

226. *Bush D.*, *Burgess N.* A hybrid oscillatory interference/continuous attractor network model of grid cell firing // Journal of Neuroscience. — 2014. — Т. 34, № 14. — С. 5065—5079.

227. *Salinas E.*, *Abbott L.* Vector reconstruction from firing rates // Journal of computational neuroscience. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 89—107.

228. Proximal policy optimization algorithms / J. Schulman [и др.] // arXiv preprint arXiv:1707.06347. — 2017.

229. A statistical framework for neuroimaging data analysis based on mutual information estimated via a gaussian copula / R. A. Ince [и др.] // Human brain mapping. — 2017. — Т. 38, № 3. — С. 1541—1573.